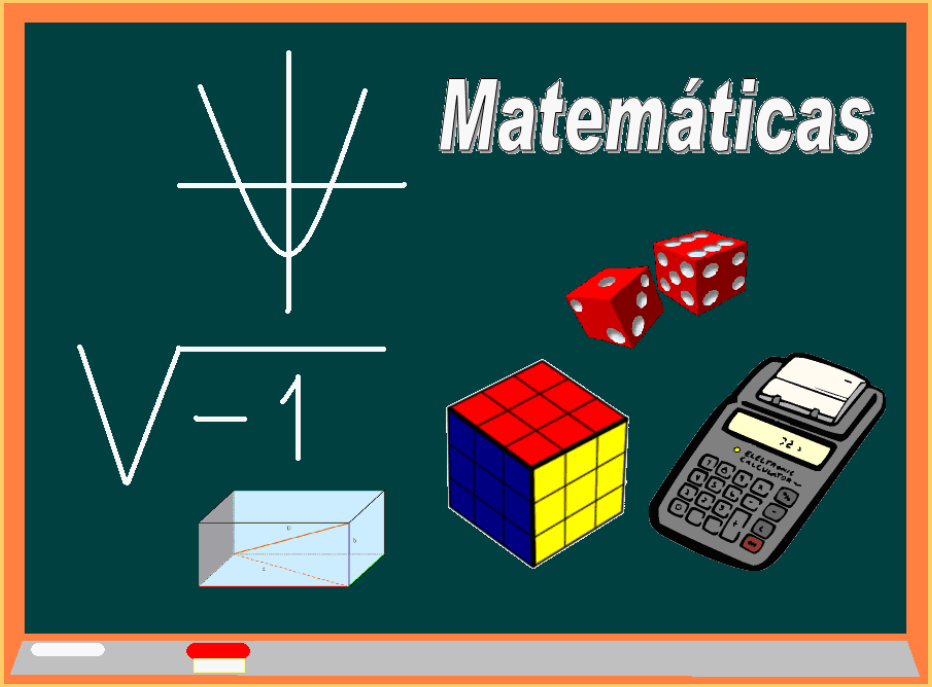
Refuerzo de 2º de ESO



ajr

Antonio Javier Roldán

Versión 2.1

Índice

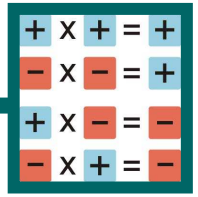
ajr

1

Los números enteros

+	x	+	=	+
−	x	−	=	+
+	x	−	=	−
−	x	+	=	−

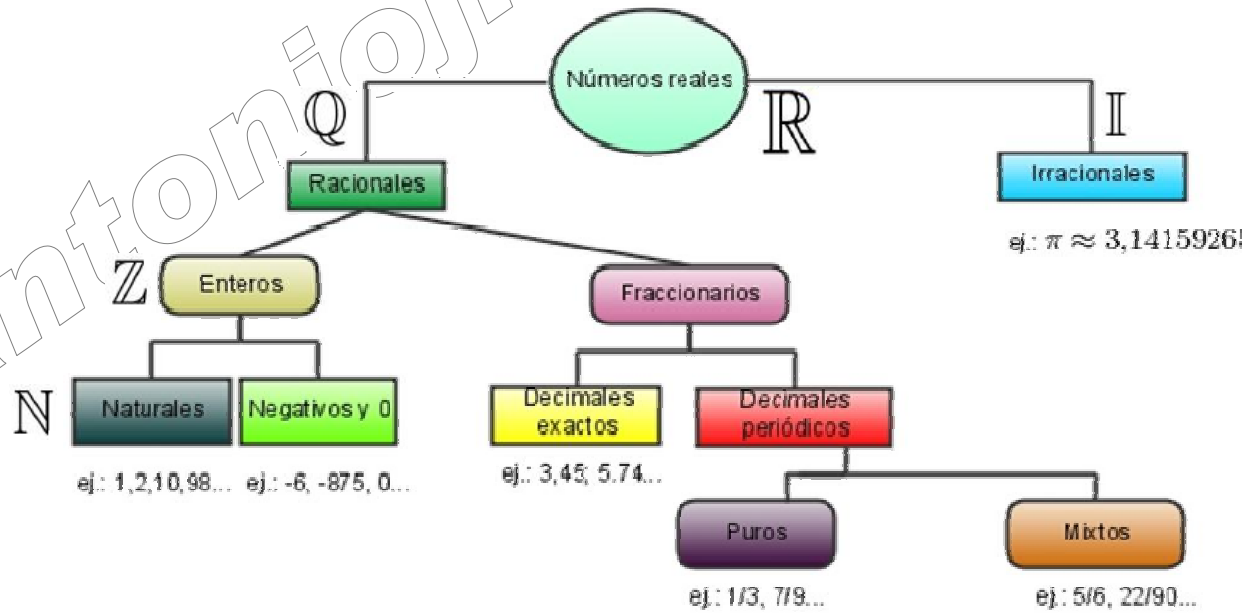
1.1 Repaso



• Tipos de números

El conjunto de los números naturales se escribe así: $\mathbb{N}$

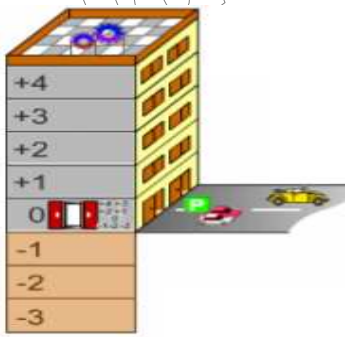
El conjunto de los números enteros se escribe así: $\mathbb{Z}$



• Números enteros

Los números enteros son los naturales, sus negativos y el cero.

En la vida hay muchas situaciones que nos obligan a usar los números enteros, como por ejemplo las temperaturas por debajo de los cero grados (*hoy hace una temperatura de –2 grados en* Madrid) o el número de planta en un ascensor que baja del nivel de la calle (*"Está usted en la planta –3, aparcamiento"*).

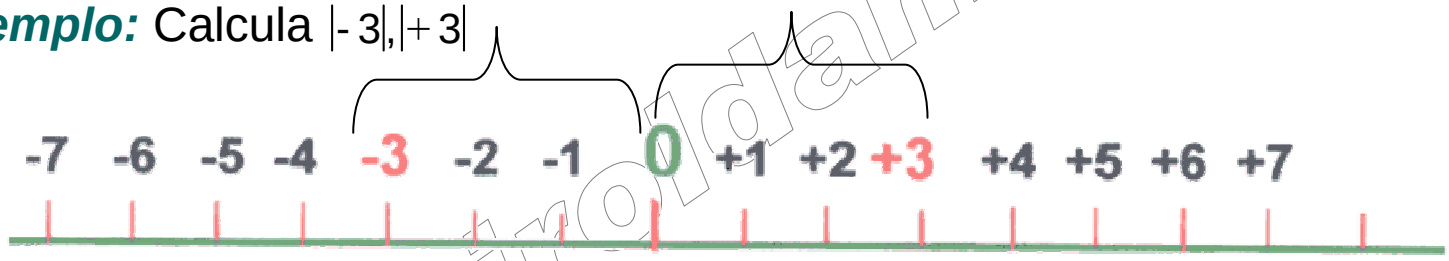


Por eso, aquellos números que usas para contar desde pequeño (*números naturales*) pueden ser ahora negativos. El conjunto de los números naturales, sus negativos y el cero (el cero no tiene signo), forman los números enteros.

• Valor absoluto

El <u>valor absoluto</u> de un número entero <u>a</u> es su distancia al 0. Se escribe así: $|a|$

Ejemplo: Calcula $|-3|, |+3|$



Propiedad: Como la distancia al cero es cero, $|0| = 0$.

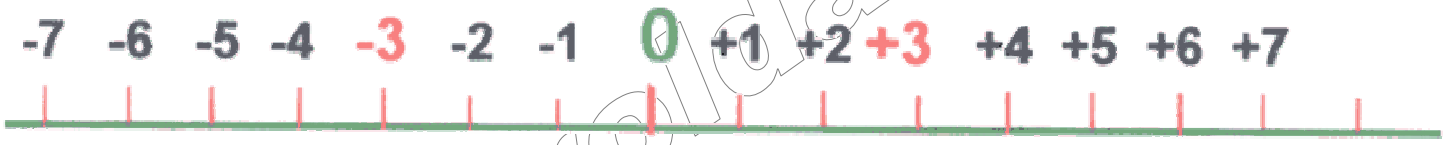
Ejercicio: *Sabiendo que el valor absoluto de un número es su distancia al cero, ¿por qué* $|0| = 0$ *?*

Ejercicio: *Los valores absolutos de –2, -1, 0, +4, +6 y 13 son:*

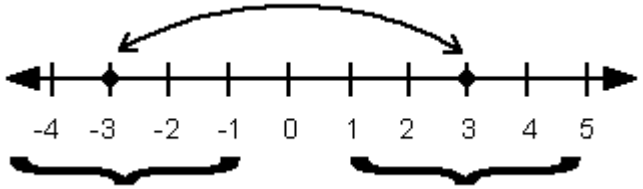
• Entero opuesto

Dos números enteros **a** y **b** son <u>opuestos</u> si tienen el mismo valor absoluto pero distinto signo. Se escribe <u>op(a).</u>

Ejemplo: El -3 y el +3 son opuestos.

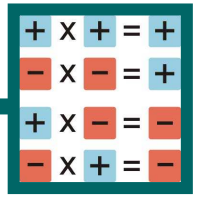


Observación: Como el cero no tiene signo, no podemos calcular su opuesto.



Ejercicio: *Calcula los opuestos de –3, +4, -1 y 0.*

1.2 Suma y resta de enteros



• Suma de dos enteros

Para <u>sumar dos números</u> enteros, seguimos la siguiente fórmula.

$$a+b=\begin{cases} sig(a)=sig(b) \Rightarrow \begin{cases} |a|+|b| \\ \text{Signo en común} \end{cases} \\ sig(a)\neq sig(b) \Rightarrow \begin{cases} |a|-|b| \\ \text{Signo del mayor} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo: (+2)+(+7)= 2+7= 9

(+2)+(-7)= 2+(-7)= -5

(-2)+(+7)= -2+7= 5

(-2)+(-7)= -9

Observación: También puedes hacerlo como si fueran euros.

$(+2)+(+7)= 2+7= 9$

$(+2)+(-7)= 2+(-7)= -5$

$(-2)+(+7)= -2+7= 5$

$(-2)+(-7)= -9$

- Sumar algo positivo ⇨ Darte dinero.
- Sumar algo negativo ⇨ Entregarte un recibo o una deuda para que pagues.

Ejercicio:

(-10) + (+3) =	(-9) + (+7) =	(+1) + (+8) =	(-7) + (+8) =
(-8) + (+4) =	(-10) + (+10) =	(-4) + (+3) =	(+4) + (+3) =
(-5) + (+6) =	(+1) + (+3) =	(-2) + (+9) =	(-2) + (+2) =
(+10) + (-3) =	(+9) + (-7) =	(+1) + (-8) =	(-7) + (-3) =
(+8) + (-4) =	(+10) + (-10) =	(-4) + (-3) =	(+4) + (-3) =
(+5) + (-6) =	(+1) + (-3) =	(-2) + (-5) =	(-2) + (-2) =

• Suma de varios enteros

Primer método: Agrupando positivos y negativos. Luego se suman.

Ejemplo:

$$(-3)+(-2)+(+1)+(-4)+(+5)-(+3)+(-1)=$$
$$(-3)+(-2)+(-4)+(-1)=(-10)=-10$$
$$(+1)+(+5)+(+3)=1+5+3=9$$
$$(-10)+9=-1$$

Segundo método: Trabajando de izquierda a derecha.

Ejemplo:

$$(-3)+(-2)+(+1)+(-4)+(+5)+(+3)+(-1)=$$
$$(-5)+(+1)+(-4)+(+5)+(+3)+(-1)=$$
$$(-4)+(-4)+(+5)+(+3)+(-1)=$$
$$(-8)+(+5)+(+3)+(-1)=$$
$$(-3)+(+3)+(-1)=$$
$$0+(-1)=-1$$

• Resta de dos enteros

Para <u>restar dos números</u> enteros, seguimos la siguiente fórmula:

a-**b**=**a**+op(**b**)

Ejemplo:

(+2)-(+7)= 2+(-7)= -5
(+2)-(-7)= 2+(+7)= 9
(-2)-(+7)= -2 + (-7)= -9
(-2)-(-7)= -2 +(+7)= 5

•Sumar algo positivo⇨Darte dinero.

•Sumar algo negativo⇨Entregarte un recibo o una deuda para que pagues.

Ejercicio:

(-10) − (+3)=	(-9) − (+7)=	(+1) − (+8)=	(-7) − (+8)=
(-8) − (+4)=	(-10) − (+10)=	(-4) − (+3)=	(+4) − (+3)=
(-5) − (+6)=	(+1) − (+3)=	(-2) − (+9)=	(-2) − (+2)=

(+10) − (-3)=	(+9) − (-7)=	(+1) − (-8)=	(-7) − (-3)=
(+8) − (-4)=	(+10) − (-10)=	(-4) − (-3)=	(+4) − (-3)=
(+5) − (-6)=	(+1) − (-3)=	(-2) − (-5)=	(-2) − (-2)=

Ejercicio: *Calcula las sumas*

a) (+2)+(+3) b) 2+3 c) (+4)+3 d) (-3)+(-2) e) (-1)+(-4) f) (+2)+(-4)

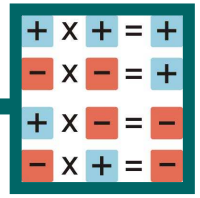
g) 2+(-4) h) 3+(-3) i) (-4)+7

Ejercicio: *Calcula las restas*

a) (+2)-(+3) b) 2-3 c) (+4)-3 d) (-3)-(-2) e) (-1)-(-4) f) (+2)-(-4)

g) 2-(-4) h) 3-(-3) i) (-4)-7 j) –5-3 k) –1-(-4)

1.3 Multiplicación y división exacta de enteros



• Multiplicación

Para multiplicar dos números enteros, seguimos la siguiente fórmula.

$$a \bullet b = \begin{cases} |a| \bullet |b| \\ \text{Regla de los signos} \begin{cases} \text{Iguales} \Rightarrow + \\ \text{Distintos} \Rightarrow - \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo:

$(+2) \bullet (+7) = 14$

$(+2) \bullet (-7) = -14$

$(-2) \bullet (+7) = -14$

$(-2) \bullet (-7) = 14$

Regla de los signos

+	por	+	=	+
−	por	−	=	+
+	por	−	=	−
−	por	+	=	−

Observación: Si tenemos que multiplicar varios enteros, se puede hacer de izquierda a derecha.

Ejemplo:

$$(+2) \bullet (-7) \bullet (-1) \bullet (-3) =$$

$$(-14) \bullet (-1) \bullet (-3) =$$

$$14 \bullet (-3) = -42$$

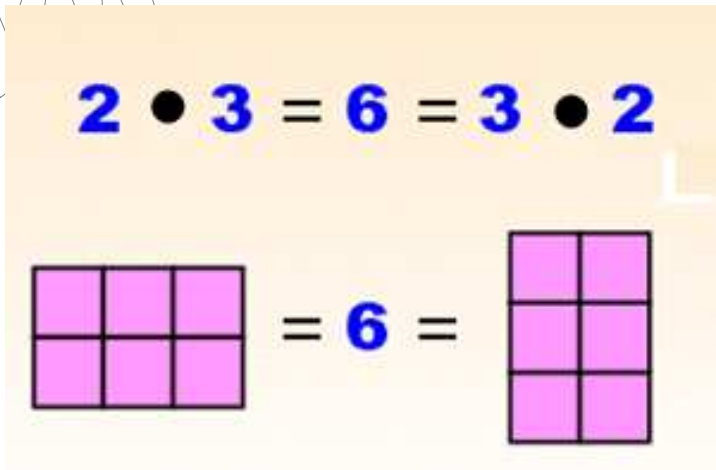
1. Multiplicar los dos números IGNORANDO SUS SIGNOS RESPECTIVOS, es decir, como si fueran los dos positivos.
2. Añadirle el signo - por delante al resultado.

• Propiedades de la multiplicación

a) ***<u>Conmutativa:</u>*** Si **a** y **b** son números enteros, entonces

$$a \bullet b = b \bullet a$$

Ejemplo: $(-2) \bullet (+3) = (+3) \bullet (-2)$



b) Asociativa: Si **a, b** y **c** son números enteros, entonces

$$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$$

Ejemplo:

$$(-2) \bullet ((+3) \bullet (-4)) = (-2) \bullet (-12) = 24$$

$$((-2) \bullet (+3)) \bullet (-4) = (-6) \bullet (-4) = 24$$

Observación: La propiedad asociativa nos dice que para multiplicar varios números enteros, podemos trabajar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.

c) <u>Distributiva de la multiplicación respecto a la suma:</u> Si **a, b** y **c** son números enteros, entonces

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$

Ejemplo: (Sin la propiedad)

$$(-2) \bullet ((+3) + (-4) + (-1)) =$$

$$(-2) \bullet (-2) = 4$$

(Con la propiedad)

$$(-2) \bullet ((+3) + (-4) + (-1)) =$$

$$(-2) \bullet 3 + (-2) \bullet (-4) + (-2) \bullet (-1) =$$

$$-6 + 8 + 2 = 4$$

d) Factor común: Si **a, b** y **c** son números enteros, entonces

$$a \bullet b + a \bullet c = a \bullet (b + c)$$

Ejemplo: (Sin la propiedad)

$$(-2) \bullet (+3) + (-2) \bullet (+4) + (-2) \bullet (-2)) =$$

$$-6 - 8 + 4 = -10$$

(Con la propiedad)

$$\underline{(-2)} \bullet (+3) + \underline{(-2)} \bullet (+4) + \underline{(-2)} \bullet (-2)) =$$

$$\underline{(-2)} \bullet ((+3) + (+4) + (-2)) =$$

$$(-2) \bullet (+5) = -10$$

Ejemplo: $12 - 2 \bullet 5 + 6 \bullet 3 - 7 \bullet 2 =$

$2 \bullet 6 - 2 \bullet 5 + 2 \bullet 3 \bullet 3 - 7 \bullet 2 =$

$2 \bullet (6 - 5 + 9 - 7) =$

$2 \bullet 3 =$

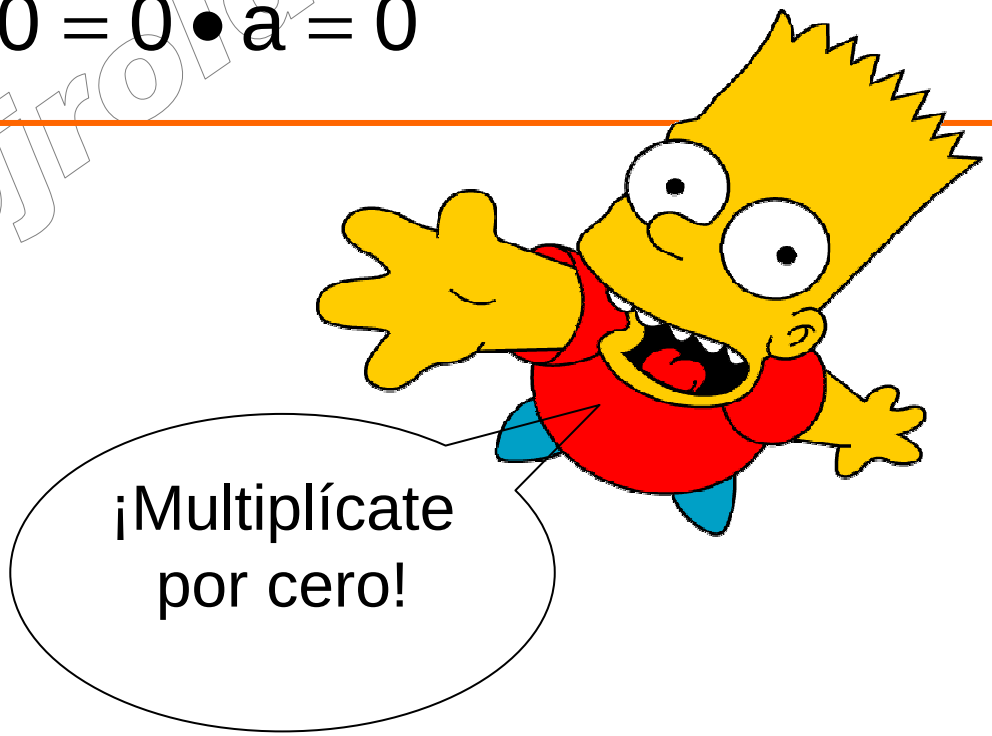
6

e) Elemento neutro: Si **a** es un número entero, entonces

$$a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$$

f) Factor cero ("Propiedad de Bart Simpson"): Si **a** es un número entero, entonces

$$a \bullet 0 = 0 \bullet a = 0$$



• División exacta de enteros

Para <u>dividir dos números</u> enteros, seguimos la siguiente fórmula.

$$a : b = \begin{cases} |a| : |b| \\ \text{Regla de los signos} \begin{cases} \text{Iguales} \Rightarrow + \\ \text{Distintos} \Rightarrow - \end{cases} \end{cases}$$

Observación: No se puede dividir entre cero.

$$\frac{0}{a} = 0; \frac{a}{0} = \infty$$

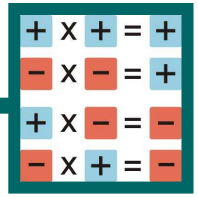
Ejercicio: *Calcula las multiplicaciones*

a) (+3)•(+3) b) 2•4 c) (+4)•3 d) (-5)•(-2) e) (-1)•(-4) f) (+2)•(-4) g) 2• (-4)
h) 3•(-3) i) (-4)•7 j) 0•3

Ejercicio: *Calcula las divisiones (si se puede)*

a) (+6) : (+3) b) 12 :3 c) (+4) :2 d) (-8) : (-2) e) (-5) : (-1) f) (+16) : (-4)
g) 12: (-4) h) 3: (-3) i) (+6) : 0 j) 0 :3 k) 0 :2 l) (-8) : 0

1.4 Operaciones combinadas con enteros



Método: Para resolver una <u>operación combinada</u> hay que seguir la prioridad mediante los siguientes pasos.

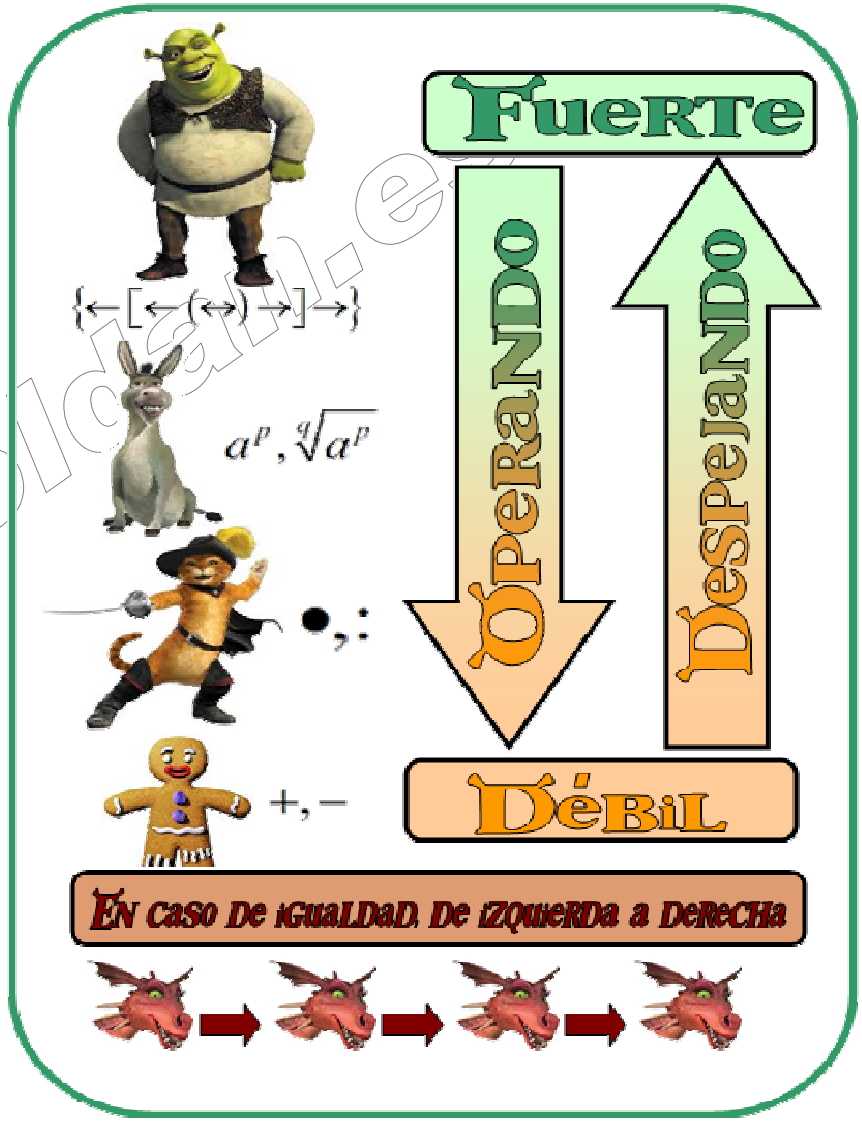
1º) Resuelve llaves, corchetes y paréntesis. Si hay varios, desde el interior hacia el exterior.

2º) Potencias y raíces.

3º) Multiplicación y división.

4º) Sumas y restas.

5º) En caso se igualdad de prioridad, trabajamos de izquierda a derecha.



Ejemplo:

$$2 - \{- [- (-3 + 3 \bullet 2) : ((-4) + 3)^2]\} =$$

$$2 - \{- [- (-3 + 6) : ((-4) + 3)^2]\} =$$

$$2 - \{- [- (+3) : (-1)^2]\} =$$

$$2 - \{- [- 3 : 1]\} =$$

$$2 - \{- [- 3]\} =$$

$$2 - \{+ 3\} =$$

Ejemplo:

$$-\left((-2)+3-(-2)^2\right)-\left[4:\left((-2)+6\right)\right]=$$

$$-\left((-2)+3-4\right)-\left[4:(+4)\right]=$$

$$-(1-4)-[+1]=$$

$$-(-3)-1=$$

$$3-1=2$$

Observación: Para cambiar un signo “menos” delante de un paréntesis por un “más”, se puede hacer cambiando todos los signos del interior.

Ejemplo:

$$-(-2+5-1-4+6)=$$

$$+(2-5+1+4-6)=$$

$$2-5+1+4-6=$$

$$-4$$

Ejercicio: *Calcula*

a) (-2)+(+3)+5+(-6)+(-1)=

b) (-3)-(-4)-(-5)+4=

c) (-1)+3+(-2)-(-4)+7-(-2)+(-1)=

d) -(-4)-(-3)+4-(-2)+3+(-6)-(-1)=

e) -(-2)-(-2)+3-(-4)+6+(-4)=

Ejercicio: *Calcula*

a) (-1) •(-2) •4 •3 •5=

b) (-2) •(-3) •(-2) •10=

c) 2 •2 •(-3) •0=

d) (-1) •(-1) •(-1) •(-1) •(-1)=

Ejercicio: *Calcula*

a) 6-6:(-2)-[-(-(-2)-2)-2]-4=

b) $3-\left\{-\left[-\left(-2+2\bullet(-1)\right)+1\right]-2\right\}=$

c) $2-\left\{-\left[-\left(-3+3\bullet(-1)\right)-2\right]+1\right\}=$

d) $(-4)+(-2)\bullet 2\bullet(-1)-\sqrt{25}-\left[(-5)\bullet 2-8\right]=$

Ejercicio: *Calcula*

a) $-36:\left[-16:(-7+3)+8:(-2+6)\right]=$

b) 8-8:(-2)-[-(-(-3)-2) -2]-2=

2

Potencias y raíces

2.1 Repaso

• Concepto de potencia

$$a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}$$

El número **a** aparece **n** veces.

Ejemplo:

exponente

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

base

(3 veces)

Ejemplo: Encuentra los valores de **a** y **p**. (Hay varias soluciones)

$$64 = a^{p}$$

$$64 = \begin{cases} 2^{6} \\ (-2)^{6} \\ 4^{3} \\ 8^{2} \\ (-8)^{2} \end{cases}$$

• Base negativa

Propiedad:

$$(-a)^n = \begin{cases} \text{Si } n \text{ es par} & \Rightarrow \textit{Positivo} \\ \text{Si } n \text{ es impar} & \Rightarrow \textit{Negativo} \end{cases}$$

Ejemplo:

$$(-2)^2 = 4 \qquad (-2)^3 = -8$$

$$-(-2)^3 = 8 \qquad -(-2)^2 = -4$$

$$-2^2 = -4 \qquad -2^3 = -8$$

$$(-2^2) = -4 \qquad (-2^3) = -8$$

• Casos especiales

Propiedades: $\boxed{a^0 = 1}$ $\boxed{a^1 = a}$ $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

Ejemplo:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} \qquad 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$[\,5\,]^{[-3]} = \frac{1}{[\,5\,]^{[3]}} = \frac{1}{125} \qquad [\,4\,]^{[-4]} = \frac{1}{[\,4\,]^{[4]}} = \frac{1}{256}$$

Ejercicio: *Calcula*

a) $(-2)^2=$ *b)* $(-2)^3=$ *c)* $-(-2)^2=$ *d)* $-(-2)^3=$ *e)* $-2^3=$

Ejercicio: *Escribe en forma de potencias de 2 o de 3.*

a) 9= *b) 8=* *c) 1=* *d) 4=* *e) 27=* *f) 2=* *g) 3=* *h) 16=*

Ejercicio: *Escribe en forma de potencias de (-2) o de (-3).*

9= *b) -8=* *c) 1=* *d) 4=* *e) -27=* *f) -2=* *g) -3=*

h) 16=

Ejercicio: *Escribe en forma de potencia de base* ***a****:*

a) $a^2 \bullet a^3 =$ *b)* $a^3 \bullet a =$ *c)* $a \bullet a =$ *d)* $a^2 \bullet a =$

Ejercicio: *Escribe en forma de exponente positivo.*

a) $4^{-3} =$ *b)* $2^{-5} =$ *c)* $3^{-3} =$ *d)* $5^{-2} =$

Ejercicio: *Escribe en forma de exponente negativo.*

a) $\frac{1}{2^3} =$ *b)* $\frac{1}{3^5} =$ *c)* *(pista $2=2^1$)* $\frac{1}{2} =$ *d)* $\frac{1}{8^3} = \frac{1}{\left(2^{[\_\_]}\right)^3} = \frac{1}{2^{[\_\_]}} =$

2.2 Operaciones de potencias con la misma base

Propiedad:

$$a^m \bullet a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo:

$$2^3 \bullet 2^4 = \begin{cases} 8 \bullet 16 = 128 \\ 2^7 = 128 \end{cases}$$

$$9 \bullet 27 = \begin{cases} 9 \bullet 27 = 243 \\ 3^2 \bullet 3^3 = 3^5 = 243 \end{cases}$$

Propiedad:

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}}$$

Ejemplo:

$$2^6 : 2^4 = \begin{cases} 64 : 16 = 4 \\ 2^{6-4} = 2^2 = 4 \end{cases}$$

$$3^4 : 3^2 = \begin{cases} 81 : 9 = 9 \\ 3^{4-2} = 3^2 = 9 \end{cases}$$

Propiedad:

$$\boxed{\left(a^{m}\right)^{n} = a^{m \bullet n}}$$

Ejemplo:

$$\left(2^{3}\right)^{4} = \begin{cases} \left(8\right)^{4} = 4096 \\ 2^{3 \bullet 4} = 2^{12} = 4096 \end{cases}$$

$$\left[\left(2^{2}\right)^{3}\right]^{2} = \begin{cases} \left[4^{3}\right]^{2} = \left[64\right]^{2} = 4096 \\ 2^{12} = 4096 \end{cases}$$

Ejercicio: *Escribe en forma de potencia de base* ***2***

(pista: no olvides que ***$(-2)^n=2^n$ si n es par****. En caso contrario,* ***no****)*

a) $4 \bullet 8 \bullet 2 = 2^{[\_\_]}$

b) $(-2)^4 \bullet 2^3 \bullet 2 = 2^{[\_\_]}$

c) $4 \bullet (-2)^2 \bullet 16 = 2^{[\_\_]}$

d) $2 \bullet 2 \bullet (-2)^6 \bullet 32 = 2^{[\_\_]}$

Ejercicio: *Sustituye el cuadradito por el número que corresponda:*

a) $(-2)^6 : (-2)^4 = (-2)^{[\_\_]}$

b) $81 : 3 = 3^{[\_\_]} : 3^{[\_\_]} = 3^{[\_\_]} = [\_\_\_\_]$

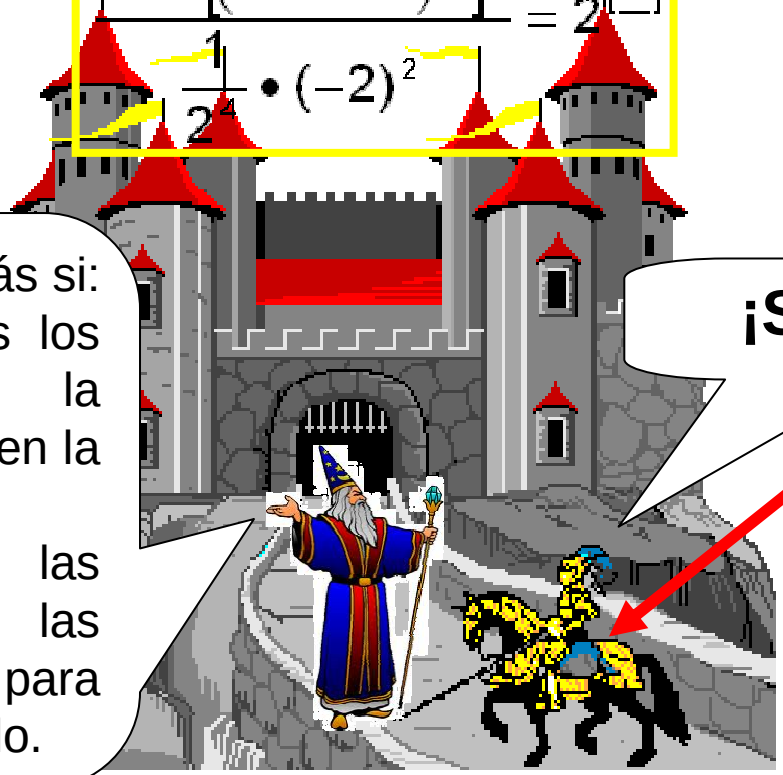
2.3 Castillos de potencias

$$\frac{2^3 \bullet \left[\left(16 \bullet 2^{-3}\right)^{-1}\right]^2}{\frac{1}{2^4} \bullet (-2)^2} = 2^{[\_]}$$

Sólo lo conquistarás si:

1) Cambias todos los números por la potencia indicada en la pista.

2) Aplicas las propiedades de las potencias para simplificar el castillo.



¡SOCORRO!

Alumno/a

Ejemplo:

$$\frac{2^3 \cdot \left[\left(16 \cdot 2^{-3}\right)^{-1}\right]^2}{\frac{1}{2^4} \cdot (-2)^2} = 2^{[\_\_]}$$

$$\frac{2^3 \cdot \left[\left(2^4 \cdot 2^{-3}\right)^{-1}\right]^2}{2^{-4} \cdot 2^2} =$$

$$\frac{2^3 \cdot \left[\left(2^1\right)^{-1}\right]^2}{2^{-2}} =$$

$$\frac{2^3 \cdot \cancel{2^{-2}}}{\cancel{2^{-2}}} = \frac{2^1}{2^{-2}} = 2^3$$

$$\boxed{2^1 : 2^{-2} = 2^{1-(-2)} = 2^{1+2}}$$

Ejemplo:

$$\frac{a^3 \bullet \left[a^{-2} \bullet \left(a^5 : a\right)^3\right]^{-1} \bullet \frac{1}{a^3}}{(-a)^4} = a^{[-]} = \frac{a^3 \bullet \left[a^{-2} \bullet \left(a^5 : a^1\right)^3\right]^{-1} \bullet a^{-3}}{a^4} =$$

$$= \frac{a^3 \bullet \left[a^{-2} \bullet \left(a^4\right)^3\right]^{-1} \bullet a^{-3}}{a^4} = \frac{a^3 \bullet \left[a^{-2} \bullet a^{12}\right]^{-1} \bullet a^{-3}}{a^4} = \frac{a^3 \bullet \left[a^{10}\right]^{-1} \bullet a^{-3}}{a^4} =$$

$$= \frac{a^3 \bullet a^{-10} \bullet a^{-3}}{a^4} = \frac{a^{-10}}{a^4} = a^{-14}$$

Ejercicio: *Sustituye el cuadradito por el número que corresponda:*

a) $(16 \bullet 4) : 2^5 = \left(2^{[\_\_]} \bullet 2^{[\_\_]}\right) : 2^{[\_\_]} = 2^{[\_\_]} : 2^{[\_\_]} = 2^{[\_\_]} = [\_\_\_]$

b) $\dfrac{a^3 \bullet a^2 : a}{a^4} = \dfrac{a^{[\_\_]} : a^{[\_\_]}}{a^4} = \dfrac{a^{[\_\_]}}{a^4} = a^{[\_\_]-4} = a^{[\_\_]} = [\_\_\_]$

c) $\left(2^3\right)^4 = 2^{[\_\_]}$

d) $\left[\left(a^2\right)^2\right]^2 = a^{[\_\_]}$

e) $(2^4 \bullet 4)^2 = \left(2^4 \bullet 2^{[\_\_]}\right)^2 = (2^{[\_\_]})^2 = 2^{[\_\_]}$

f) $\left(b^7 : b^2\right)^3 = \left(b^{[\_\_]}\right)^3 = b^{[\_\_]}$

Ejercicio: *Sustituye el cuadradito por el número que corresponda:*

a) $\left[2^2 \bullet (16:2)^3\right]^2 = \left[2^2 \bullet \left(2^{[\_\_]} : 2^{[\_\_]}\right)^3\right]^2 = \left[2^2 \bullet \left(2^{[\_\_]}\right)^3\right]^2 = \left[2^2 \bullet 2^{[\_\_]}\right]^2 = \left[2^{[\_\_]}\right]^2 = 2^{[\_\_]}$

b) $\dfrac{\left[2^8 \bullet \left(2^3 : 2\right)^2\right]^2}{8} = \dfrac{\left[2^8 \bullet \left(2^3 : 2^{[\_\_]}\right)^2\right]^2}{2^{[\_\_]}} = \dfrac{\left[2^8 \bullet \left(2^{[\_\_]}\right)^2\right]^2}{2^{[\_\_]}} = \dfrac{\left[2^8 \bullet 2^{[\_\_]}\right]^2}{2^{[\_\_]}} = \dfrac{\left[2^{[\_\_]}\right]^2}{2^{[\_\_]}} = \dfrac{2^{[\_\_]}}{2^{[\_\_]}} = 2^{[\_\_]}$

c) $\left(999999^{888888}\right)^0 = 999999^{[\_\_]} = [\_\_\_\_]$ d) $\left[(-2)^3\right]^2 : 16 = (-2)^{[\_\_]} : (-2)^{[\_\_]} = (-2)^{[\_\_]} = [\_\_\_\_]$

e) $\left[(-3)^2\right]^2 : 81 = (-3)^{[\_\_]} : (-3)^{[\_\_]} = (-3)^{[\_\_]} = [\_\_\_\_]$

Ejercicio: *Sustituye el cuadradito por el número que corresponda:*

a)
$$\frac{(3^{-3} \bullet 9)^{-2} \bullet \frac{1}{27}}{(3^{2})^{-3} \bullet (-3)^{4}} = 3^{[\_]}$$

b)
$$\frac{(a^{2})^{-2} \bullet a^{-3} \bullet \frac{1}{a^{-2}}}{(-a)^{-4} \bullet a^{3}} = a^{[\_]}$$

c)
$$\frac{\left[2 \bullet \left(2^{-3} \bullet 8\right)^{2}\right]^{-3}}{\frac{1}{16} \bullet (-2)^{2}} = 2^{[\_]}$$

d)
$$\frac{a^{3} \bullet \left[a^{-2} \bullet \left(a^{5} : a\right)^{3}\right]^{-1} \bullet \frac{1}{a^{3}}}{(-a)^{4}} = a^{[\_]}$$

2.4 Operaciones de potencias con el mismo exponente

Propiedad:

$$a^m \bullet b^m = (a \bullet b)^m$$

Ejemplo:

$$2^3 \bullet 3^3 = \begin{cases} 8 \bullet 27 = 216 \\ 6^3 = 216 \end{cases}$$

$$12^3 = \begin{cases} (3 \bullet 4)^3 = 3^3 \bullet 4^3 = 1728 \\ 12 \bullet 12 \bullet 12 = 1728 \end{cases}$$

Propiedad:

$$a^m : b^m = (a : b)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Ejemplo:

$$9^2 : 3^2 = \begin{cases} 81 : 9 = 9 \\ 3^2 = 9 \end{cases}$$

$$2^3 = \begin{cases} (8 : 4)^3 = 512 : 64 = 8 \\ 2 \bullet 2 \bullet 2 = 8 \end{cases}$$

$$a^m + b^m \neq (a+b)^m$$

$$a^m - b^m \neq (a-b)^m$$

Error frecuente en 2º de ESO

2.5 Cuadrados perfectos y raíces cuadradas

• Cuadrado perfecto

Los cuadrados perfectos son los que se obtienen elevando al cuadrado otros números enteros.

Ejemplo: Vamos a ver todos los cuadrados perfectos desde el 1 hasta el 20

$1^2 = 1$	$5^2 = 25$	$9^2 = 81$	$13^2 = 169$	$17^2 = 289$
$2^2 = 4$	$6^2 = 36$	$10^2 = 100$	$14^2 = 196$	$18^2 = 324$
$3^2 = 9$	$7^2 = 49$	$11^2 = 121$	$15^2 = 225$	$19^2 = 361$
$4^2 = 16$	$8^2 = 64$	$12^2 = 144$	$16^2 = 256$	$20^2 = 400$

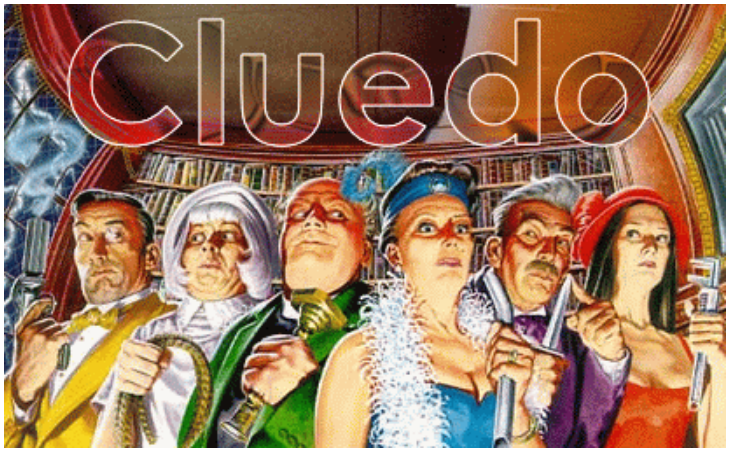
$1^2 = 1$	$5^2 = 25$	$9^2 = 81$	$13^2 = 169$	$17^2 = 289$
$2^2 = 4$	$6^2 = 36$	$10^2 = 100$	$14^2 = 196$	$18^2 = 324$
$3^2 = 9$	$7^2 = 49$	$11^2 = 121$	$15^2 = 225$	$19^2 = 361$
$4^2 = 16$	$8^2 = 64$	$12^2 = 144$	$16^2 = 256$	$20^2 = 400$

Propiedad: Los cuadrados perfectos acaban en 0, 1, 4, 5, 6 y 9

Ejemplo: ¿Qué dirías del 10287?

¿Y del 23456?

¿Qué opinas del 625?



Observación: Esta propiedad sirve para descartar a los números que no son cuadrados perfectos.

• Raíz cuadrada exacta

La raíz cuadrada exacta de un número entero **a** es otro número **b** cuyo cuadrado es igual al primero.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Ejemplo: ¿Cuál es la raíz cuadrada de 81?

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{81} = 9 \\ \sqrt{81} = -9\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{81} = \pm 9$$

• Raíz cuadrada entera

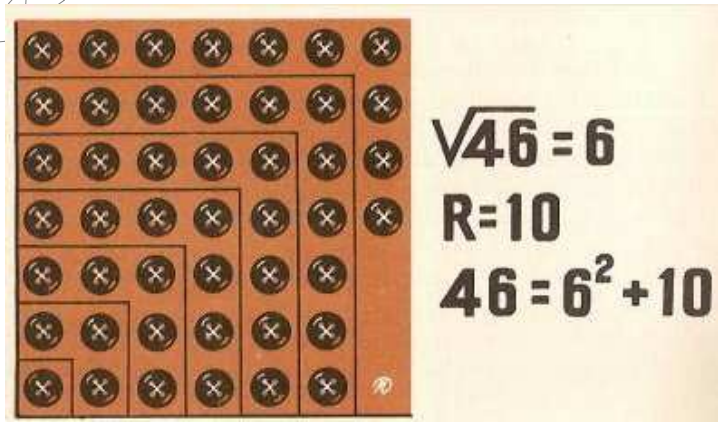
La raíz cuadrada entera de un número **a** es el mayor entero **b** cuyo cuadrado es menor que ese número, acercándose a él lo máximo posible.

Ejemplo:

$$\sqrt{10} = 3$$

$$\sqrt{91} = 9$$

$$\sqrt{150} = 12$$



Observación: Como es una raíz entera quitamos los decimales, por lo que se crea un **resto**.

Ejemplo:

$$\sqrt{32} = 5 \; ; \; \text{Resto} = 7$$

$$5 < \sqrt{32} < 6 \Rightarrow \text{Resto} = 32 - 5^2 = 7$$

Encuentra el valor de los cuadrados en blanco:

$$[\underline{11}] < \sqrt{136} < [\underline{12}] \Rightarrow \text{Resto} = [\underline{136}] - [\underline{11}]^2 = [\underline{15}]$$

$$[9] < \sqrt{[\underline{\;95\;}]} < [\underline{10}] \Rightarrow \text{Resto} = [\underline{\;95\;}] - [\underline{\;9\;}]^2 = [14]$$

2.6 Equivalencia entre una raíz y una potencia

Propiedad:

$$\boxed{\sqrt[q]{a^P} = a^{P/q}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{2^{15}} = 2^{15/3} = 2^5 = 32$$

$$\sqrt{256} = \begin{cases} \sqrt{2^8} = 2^{8/2} = 2^4 = 16 \\ \sqrt{256} = 16 \end{cases}$$

2.7 Operaciones con raíces cuadradas

Propiedad:

$$\sqrt[q]{a} \bullet \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a \bullet b}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{4} \bullet \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \bullet 16} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 4$$

$$\sqrt{36} \bullet \sqrt{81} = \begin{cases} \sqrt{36 \bullet 81} = \sqrt{2916} = 54 \\ 6 \bullet 9 = 54 \end{cases}$$

$$\sqrt{11025} = \sqrt{3^2 \bullet 5^2 \bullet 7^2} = 3 \bullet 5 \bullet 7 = 105$$

Propiedad:

$$\sqrt[q]{a} : \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a : b}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{36 : 9} = \begin{cases} \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt{36} : \sqrt{9} = 6 : 3 = 2 \end{cases}$$

Propiedad:

$$\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^m = \sqrt[q]{a^{p \bullet m}}$$

Ejemplo:

$$\left(\sqrt{9}\right)^2 = \begin{cases} 3^2 = 9 \\ \sqrt{9^2} = \sqrt{81} = 9 \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{2^3}\right)^4 = \sqrt{(2^3)^4} = \sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$$

Propiedad:

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \bullet q]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2^{12}}} = 2^{\frac{12}{6}} = 2^{2}$$

Ejercicio: *Sustituye el cuadradito por el número que corresponda:*

a) $$\frac{(2^{-2} \bullet \sqrt[3]{2^{6}})^{-3} \bullet 2}{(\sqrt{2^{-10}})^{2} \bullet (-2)^{4}} = 2^{[\_\_]}$$

b) $$\sqrt{2^{3}} \bullet \sqrt{2^{-4}} \bullet \sqrt{2^{5}}$$

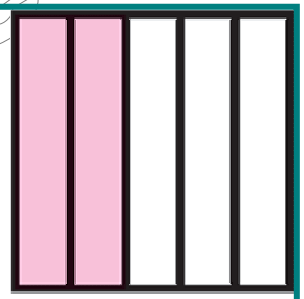
c) $$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^{2} \bullet x^{-5}}}{\sqrt{x^{4}} \bullet x^{7}}} = x^{[\_\_]}$$

d) $$\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^{24}}}} \bullet x^{-30}}{\frac{1}{x^{-3}} \bullet \sqrt{x^{-8}}} = x^{[\_\_]}$$

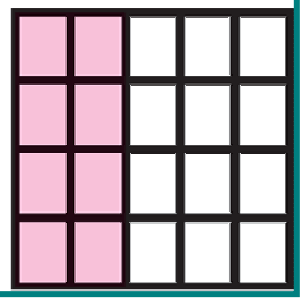
3

Fracciones y decimales

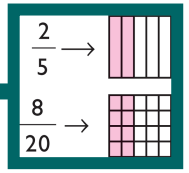
$\frac{2}{5} \rightarrow$



$\frac{8}{20} \rightarrow$



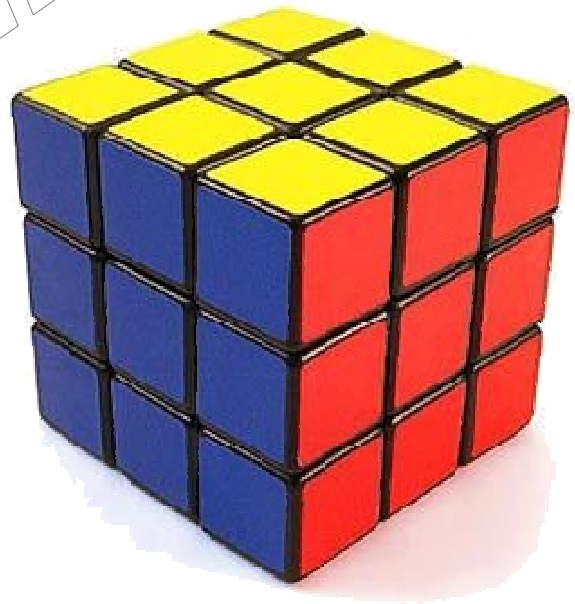
3.1 Equivalencia de fracciones



• Repaso

- Total de cubitos: 26
- Fracción de las esquinas: $\frac{8}{26}$
- Fracción de cubos con cara azul: $\frac{9}{26}$
- Fracción de los “centros”: $\frac{6}{26}$

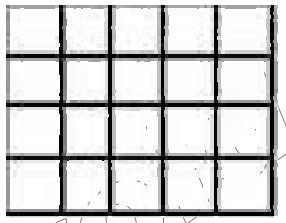
$$\frac{6}{26} = \frac{6:2}{26:2} = \frac{3}{13}$$



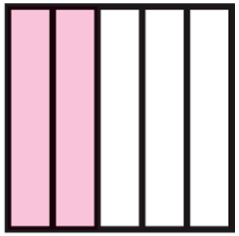
• Fracciones equivalentes

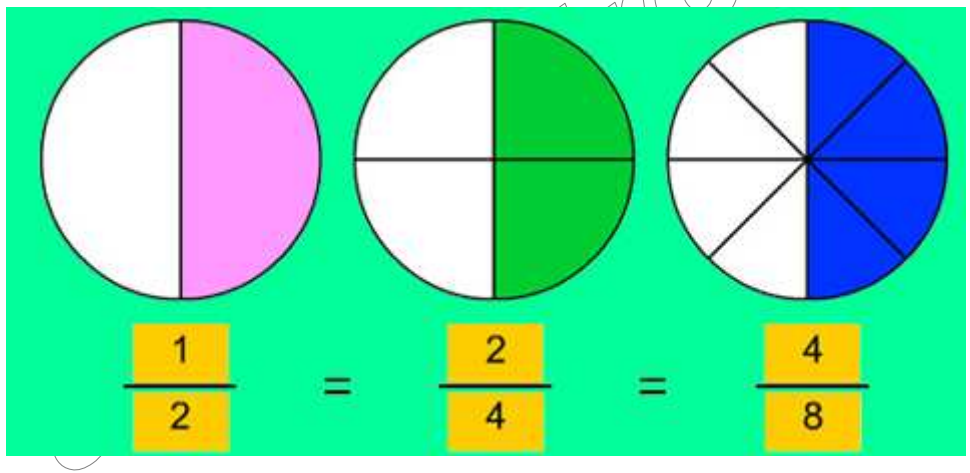
Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son <u>equivalentes</u> si representan la misma parte de un todo.

Ejemplo: $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{20}$

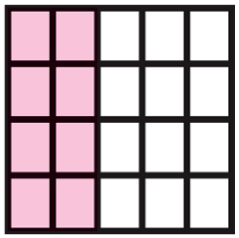


$\frac{2}{5} \longrightarrow$





$\frac{8}{20} \longrightarrow$



Método: Existen varios caminos para comprobar que dos fracciones son equivalentes.

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} \text{ y } \frac{8}{20}$$

Gráficamente

$\frac{2}{5} \rightarrow$ 

$\frac{8}{20} \rightarrow$ 

$$\frac{8:4}{20:4} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2 \bullet 4}{5 \bullet 4} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{2}{5} \rightarrow \frac{8}{20} \Rightarrow ¿2 \bullet 20 = 5 \bullet 8? \Rightarrow 40 = 40 \text{ ¡Sí son equivalentes!}$$

• Común denominador, mcm y mcd

El <u>mínimo común múltiplo</u> (m.c.m.) de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de todos ellos. Para calcularlo se descomponen los números en factores primos y se multiplican <u>todos los factores elevados al mayor exponente</u>.

Ejemplo: Calcula el mcm(50,72)

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \qquad 50 = 2 \cdot 5^2$$

$$mcm(72, 50) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$$

El <u>máximo común divisor</u> (m.c.d.) de dos o más números naturales es el mayor número que los divide sin dejar resto. Para calcularlo se descomponen los números en factores primos y se multiplican todos <u>los factores comunes elevados al menor exponente</u>.

Ejemplo: Calcula el mcd(48,60)

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad mcd(48,60) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Observación: Existen infinitos <u>denominadores comunes</u> para varias fracciones, pero el más pequeño es el que se obtiene haciendo el mcm.

Ejemplo: Transforma las fracciones en otras equivalentes con común denominador.

$$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{10},\frac{-3}{6} \Rightarrow \frac{30}{60},\frac{45}{60},\frac{18}{60},\frac{-30}{60}$$

$$\text{mcm}(2,4,10,6) = 2^2 \bullet 3 \bullet 5 = 60$$

• Fracción irreducible

Existen infinitas fracciones equivalentes a una dada. La más pequeña se llama <u>fracción irreducible</u>.

$$\text{Fracción irreducible de } \frac{a}{b} = \frac{a : mcd(a,b)}{b : mcd(a,b)}$$

Ejemplo: $\frac{420}{315} = \frac{420 : mcd(420,315)}{315 : mcd(420,315)} = \frac{420 : 105}{315 : 105} = \frac{4}{3}$

420	2	315	3
210	2	105	3
105	3	35	5
35	5	7	7
7	7	1	
1			

$$mcd(420,315) = 3 \bullet 5 \bullet 7 = 105$$

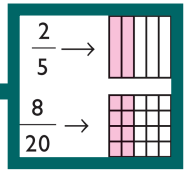
Ejercicio: *Comprueba si son equivalentes.*

a) $\frac{-4}{12}$ y $\frac{-12}{36}$ b) $\frac{6}{4}$ y $\frac{9}{6}$ c) $\frac{5}{6}$ y $\frac{6}{8}$ d) $\frac{18}{4}$ y $\frac{27}{6}$

Ejercicio: *Busca la fracción irreducible.*

a) $\frac{-450}{540}$ b) $\frac{2160}{900}$ c) $\frac{784}{140}$

3.2 Comparación de fracciones



• Reducción a común denominador

Ejemplo:

$$\frac{5}{8},\frac{4}{12},\frac{-5}{6},\frac{-2}{20} \Rightarrow \frac{75}{120},\frac{40}{120},\frac{-100}{120},\frac{-12}{120}$$

$$mcm(8,12,6,20) = 2^3 \bullet 3 \bullet 5 = 120$$

8	2	12	2	6	2	20	2	
4	2	6	2	3	3	10	2	
2	2	3	3	1		5	5	
1		1				1		

• Comparación de fracciones

Propiedad: Si tienen <u>igual denominador</u>, es mayor la que tiene mayor numerador.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3},\frac{-5}{3},\frac{10}{3},\frac{-1}{3} \Rightarrow \frac{-5}{3} < \frac{-1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{10}{3}$$

Propiedad: Si tienen <u>igual numerador</u>, es mayor la que tiene menor denominador.

Ejemplo:

$$\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{10},\frac{3}{7} \Rightarrow \frac{3}{10} < \frac{3}{7} < \frac{3}{4} < \frac{3}{2}$$

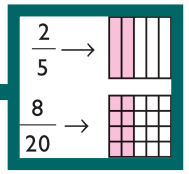
Propiedad: Si tienen <u>distintos numerador y denominador</u>, se pasan a común denominador y se comparan.

Ejemplo:

$$\frac{3}{2},\frac{-1}{4},\frac{2}{10},\frac{-4}{5} \Rightarrow \frac{30}{20},\frac{-5}{20},\frac{4}{20},\frac{-16}{20} \Rightarrow$$

$$\frac{-16}{20} < \frac{-5}{20} < \frac{4}{20} < \frac{30}{20} \Rightarrow \frac{-4}{5} < \frac{-1}{4} < \frac{2}{10} < \frac{3}{2}$$

3.3 Suma y resta de fracciones



• Uso del signo menos

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Error frecuente en 2º de ESO

$$-\frac{a}{b} \neq \frac{-a}{-b}$$

Piensa un poco… Si yo sumo euros, ¿qué me salen? ¿Dólares o euros? Supongo que has pensado que esta pregunta es una tontería, y que la respuesta es euros.

Pues lo mismo pasa con las fracciones. Si sumo o resto tercios saldrán tercios y si sumo o resto onceavos saldrán onceavos. Por eso es obligatorio en la suma y la resta pasar antes a común denominador, porque es igual de absurdo sumar lápices con macarrones que sumar medios con tercios.

• Con igual denominador

Método: Se suman (o restan) los numeradores y se mantiene el denominador común.

Ejemplo:

$$\frac{-3}{6}-\frac{1}{6}-\frac{-2}{6}+\frac{7}{6}=\frac{-3-1-(-2)+7}{6}=\frac{5}{6}$$

• Con distinto denominador

Método: Se pasan a común denominador y se opera como en el apartado anterior.

Ejemplo:

$$\frac{-1}{6}-\frac{2}{5}-\frac{2}{20}-\frac{-2}{15}=\frac{-10}{60}-\frac{24}{60}-\frac{6}{60}-\frac{-8}{60}=\frac{-32}{60}=\frac{-8}{15}$$

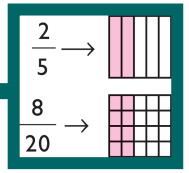
Ejercicio: *Reduce a común denominador.*

a) $\frac{-4}{12}, \frac{3}{6}, \frac{-5}{15}$ *b)* $\frac{1}{10}, \frac{-2}{15}, \frac{3}{24}, \frac{1}{6}$

Ejercicio: *Calcula.*

a) $\frac{-3}{12} + \frac{4}{30} =$ *b)* $\frac{3}{7} - \frac{3}{14} + \frac{5}{42} - \left(-\frac{-3}{28}\right) =$ *c)* $\frac{-1}{20} + \frac{3}{12} - 2 + \frac{2}{30} = \ldots (pista: 2 = \frac{2}{1})$

3.4 Multiplicación, inversa y división de fracciones



• Multiplicación

$$\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} = \frac{a \bullet c}{b \bullet d}$$

Ejemplo:

$$\frac{-1}{6} \bullet \frac{2}{5} = \frac{-2}{30} = \frac{-1}{15}$$

• Inversa de un fracción

$$\text{inversa}\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{-1}{6}\right)^{-1} = \frac{6}{-1} = -\frac{6}{1} = \frac{-6}{1} = -6$$

• División

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c} = \frac{a \bullet d}{b \bullet c}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{-1}{6}\right) : \frac{2}{5} = \frac{-1 \bullet 5}{6 \bullet 2} = \frac{-5}{12}$$

Ejercicio: *Calcula*

a) $3-\frac{-1}{3}+\frac{-3}{9}-\left(-\frac{-5}{12}\right)=$

b) $\frac{-3}{5}\bullet\frac{2}{7}=$

c) $\frac{-3}{6}\bullet\frac{5}{4}=$

d) $\frac{-2}{4}\bullet\frac{-4}{5}=$

e) $\frac{-2}{3}\bullet\frac{8}{2}\bullet\left(\frac{-3}{4}+\frac{2}{6}-\frac{3}{2}\right)=$

f) $\left(\frac{-3}{6}\bullet\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{9}=$

Ejercicio: *Calcula*

a) $\frac{-3}{5} : \frac{2}{7} =$

b) $\frac{-3}{6} : \frac{5}{4} =$

c) $\frac{-2}{4} : \frac{-4}{5} =$

d) $\frac{-2}{3} : \left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{-5}{2} \right) =$

e) $\left(\frac{-3}{6} \bullet \frac{1}{2} \right) : \left(\frac{1}{4} \bullet \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{9} =$

f) $\frac{1}{8} : \frac{-2}{5} + \frac{3}{4} : 4 =$

3.5 Potencias y raíces de fracciones

• Potencias

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Observación: Las propiedades de las potencias que vimos para los enteros valen para las fracciones.

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{2^{-1}}{3^{-1}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

"Pan con pan"

"Carne con carne"

• Raíces

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{100}{25}} = \begin{cases} \sqrt{4} = 2 \\ \dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \dfrac{10}{5} = 2 \end{cases}$$

Observación: Las propiedades de las raíces que vimos para los enteros valen para las fracciones.

Ejercicio: *Calcula*

a) $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 =$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 =$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 =$

d) $\left(\frac{-1}{2}\right)^5 =$

e) $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 =$

f) $\frac{(-2)^3}{3} =$

g) $-\frac{-2^3}{3} =$

h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$

3.6 Combinadas de fracciones

Método: Para resolver una <u>operación combinada</u> hay que seguir la prioridad mediante los siguientes pasos.

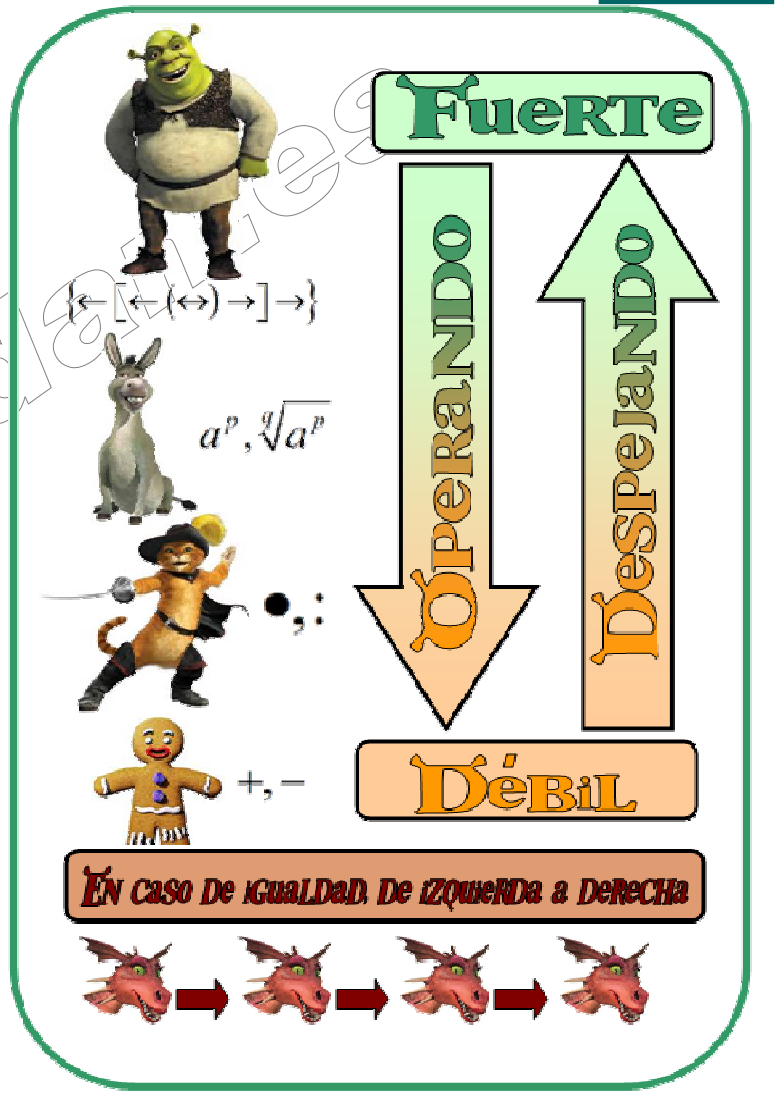
1º) Resuelve llaves, corchetes y paréntesis. Si hay varios, desde el interior hacia el exterior.

2º) Potencias y raíces.

3º) Multiplicación y división.

4º) Sumas y restas.

5º) En caso se igualdad de prioridad, trabajamos de izquierda a derecha.



Ejemplo:

$$\frac{1}{2}-\left\{\frac{2}{3}-\left[\sqrt{\frac{4}{9}}\bullet\frac{1}{2}-\frac{(-2)^2}{5}\right]\right\}=\frac{1}{2}-\left\{\frac{2}{3}-\left[\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{2}-\left\{\frac{2}{3}-\left[\frac{2}{6}-\frac{4}{5}\right]\right\}=\frac{1}{2}-\left\{\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right]\right\}=\frac{1}{2}-\left\{\frac{2}{3}-\left[\frac{5}{15}-\frac{12}{15}\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{2}-\left\{\frac{2}{3}-\left[\frac{-7}{15}\right]\right\}=\frac{1}{2}-\left\{\frac{2}{3}+\frac{7}{15}\right\}=\frac{1}{2}-\left\{\frac{10}{15}+\frac{7}{15}\right\}=\frac{1}{2}-\left\{\frac{17}{15}\right\}=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{17}{15}=\frac{15}{30}-\frac{34}{30}=\frac{-19}{30}$$

$$\boxed{\frac{15}{30}-\frac{34}{30}\neq 15-34 \text{ Esto no es una ecuación.}}$$

<antonioroldan.es>

Ejemplo:

$$1-\left\{-\left[-\left(\frac{-1^2}{3}\right)+\frac{-2}{9}:3^{-1}\right]+1\right\}=1-\left\{-\left[-\left(\frac{-1}{3}\right)+\frac{-2}{9}:\frac{1}{3}\right]+1\right\}=$$

$$1-\left\{-\left[\frac{1}{3}+\frac{-6}{9}\right]+1\right\}=1-\left\{-\left[\frac{3}{9}+\frac{-6}{9}\right]+1\right\}=1-\left\{-\left[\frac{-3}{9}\right]+1\right\}=$$

$$1-\left\{\frac{3}{9}+1\right\}=1-\frac{3}{9}-1=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}=\frac{-1}{3}$$

Ejercicio: *Calcula*

a) $\frac{1}{2}-\left\{\frac{2}{3}-\left[\sqrt{\frac{4}{9}}\bullet\frac{1}{2}-\frac{(-2)^2}{5}\right]\right\}=$

b) $1-\left\{-\left[-\left(\frac{-1^2}{3}\right)+\frac{-2}{9}:3^{-1}\right]+1\right\}=$

c) $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\bullet\frac{-4}{3}-\left(-\frac{-3}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\bullet\frac{5}{9}\right)$

d) $\frac{-3}{18}+\frac{5}{36}-\frac{3}{40}+\frac{-1}{24}+\frac{1}{60}+\frac{5}{120}$

Ejercicio: *Calcula*

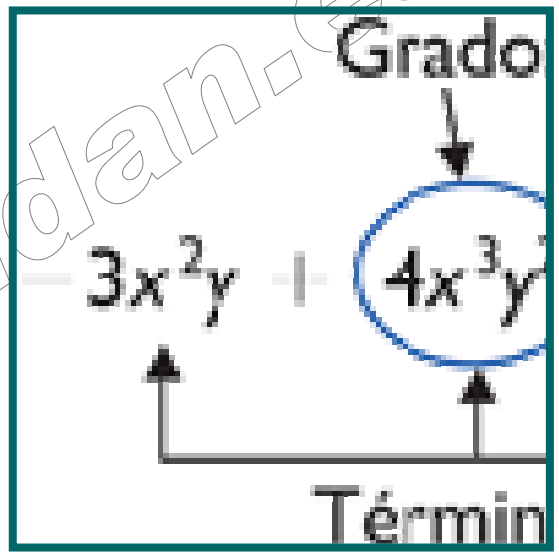
a) $2-\left\{-\left[-\frac{-1}{9}+\frac{1}{30}+\frac{-2}{5}\bullet\frac{1}{3}\right]+2\right\}$

b) $\frac{-3}{4}+\frac{1}{4}\bullet\left(\frac{2}{3}-\frac{-4}{6}\right)+\frac{(-2)}{24}=$

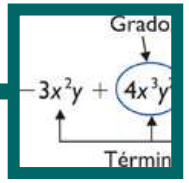
c) $-\left(-\frac{-1}{28}-\frac{3}{2}:\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-2}{3}\right)\bullet\left(\frac{-2}{3}\right)$

4

Expresiones algebraicas



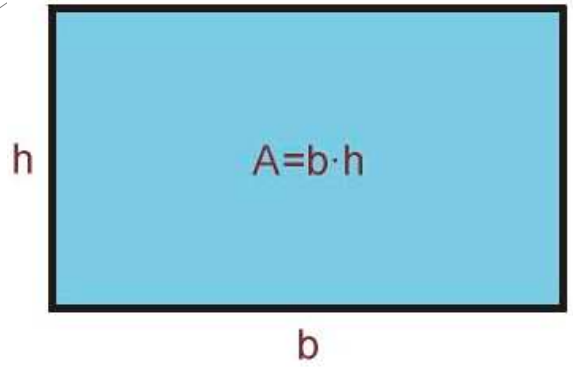
4.1 Números y letras



• Letras para representar números

Ejemplo:

$$A_{RECTANGULO} = b \bullet h$$



$$\text{MediaMatemáticas} = \text{Parte Entera}\left(0{,}8 \bullet \frac{(E1 + 2 \bullet E2 + 3 \bullet E3)}{6} + Cl + Ac + Ex\right)$$

Piensa un número. ¿Ya está? Súmale 2. Perfecto. Ahora divide todo por 3. ¿OK? Eleva esa división a 5. Si todavía te quedan ganas, réstale a todo el número que pensaste. FIN

Acabas de hacer una serie de operaciones absurdas, lo cual demuestra que eres capaz de hacer todo lo que te diga. ¡Gracias por confiar en mí aunque te mande tonterías!

Bueno, ahora en serio. Vamos a traducir mis órdenes anteriores en un lenguaje matemático llamado <u>algebraico</u>.

Ejemplo:

Piensa un número (*Como nadie lo conoce salvo tú, lo puedo llamar* ***x***). ¿Ya está? Súmale 2 (*Si a* ***x*** *le sumo dos me sale* ***x+2***). Perfecto. Ahora divide todo por 3 (*¡He dicho todo!*). $\frac{x+2}{3}$ ¿OK? Eleva esa división a 5 (*Pongo paréntesis para que la potencia afecte a todo*) $\left(\frac{x+2}{3}\right)^5$.

Si todavía te quedan ganas, réstale a todo el número que pensaste . $\left(\frac{x+2}{3}\right)^5 - x$

FIN

• Del castellano al algebraico

Ejemplo:

•Piensa un número par. $2x$

•Multiplícalo por cinco. $5 \bullet 2x$

•Súmale 2 unidades. $5 \bullet 2x + 2$

•Eleva todo al cuadrado. $(5 \bullet 2x + 2)^2$

•Calcula la mitad del total. $\dfrac{(5 \bullet 2x + 2)^2}{2}$

•Increméntala en una unidad. $\dfrac{(5 \bullet 2x + 2)^2}{2} + 1$

Ejercicio: Traduce al lenguaje algebraico:

a) Tres números naturales consecutivos
b) El número par siguiente a 2n
c) Tres pares consecutivos
d) Dos números impares consecutivos
e) El triple de un número impar
f) El cuadrado de la suma de dos números
g) La suma de los cubos de dos números
h) La diferencia de un número y su cuadrado

•Del algebraico al castellano

Ejemplo: $2x+1$

Un número impar

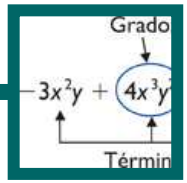
Un número par más una unidad

El número siguiente a un par

Ejercicio: Traduce al lenguaje castellano:

a) $2x$ *b)* $\frac{x^2}{2}$ *c)* $x-\frac{x^2}{2}$ *d)* $2(x^2-y^2)$ *e)* a^2+b^2

4.2 Expresiones algebraicas



•Expresión algebraica

Una <u>expresión algebraica</u> es una combinación de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación, división y potencia. Algunas tienen significado, otras no…

Ejemplo:

$$v = \frac{S}{t}$$

El profesor explica la lección

$$-3a^2bc^3 - 5x$$

Lápiz un del casa come aún la

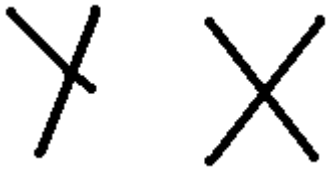
En una expresión algebraica, se llama <u>coeficiente</u> a la parte numérica y <u>parte literal</u> a las letras con sus exponentes .

Ejemplo:

$$-3a^2bc^3 - 5x$$

$$-3, -5 \qquad a^2bc^3, x$$

Observación: Cuidado al escribir la letra “y”.

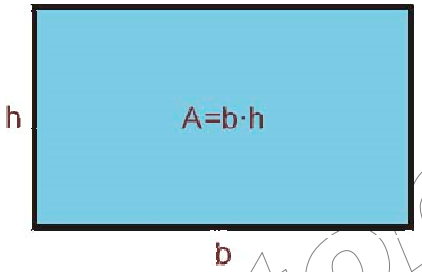


• Valor numérico

Valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir las letras por números determinados y hacer las operaciones indicadas:

Ejemplo: Calcula el valor numérico para

a) b=3 m y h=4 m b) b=1,5 m y h=2 m c) b=2 m y c=2,5 m



$$-3a^2bc^3 - 5x, \text{ para } x=1,\ a=-2,\ b=3,\ c=-1$$

$$-3 \bullet (-2)^2 \bullet 3 \bullet (-1)^3 - 5 \bullet 1 = -3 \bullet 4 \bullet 3 \bullet (-1) - 5 =$$

$$= 36 - 5 = 31$$

Ejercicio: *Calcula el valor numérico de las expresiones para los valores que te indico:*

a) x^2-3x *para* $x= -3$

b) $\frac{2x+5}{3}$ *para* $x=5$

c) $3a-4b+2c$ *para* $a=3$, $b= -1$ *y* $c=2$

d) $-x^2$ *para* $x=-2$ *(¡Cuidado!)*

Ejercicio: *Calcula el valor numérico de a+2b2-3c para los valores que te indico.*

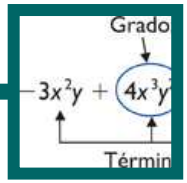
a) $a=1$, $b=1$ *y* $c=1$

b) $a= -1$, $b=0$ *y* $c=-2$

c) $a= -3$, $b=2$, *y* $c=1$

d) $a=0$, $b=-2$ *y* $c=-1$

4.3 Monomios y polinomios



• Monomio

Un <u>monomio</u> es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que afectan a las letras son la multiplicación y la potencia de exponente entero no negativo.

Ejemplo: ¿Son monomios?

(Los monomios suelen estar disfrazados tras una máscara, no te fíes de ellos…)

$$4 = 4x^0$$

$$4x^2 + 5x^2 = 9x^2$$

$$\frac{2}{3}x^2yz$$

$$5\frac{x^3}{x^5}$$

$$4x^2 + 5x^3$$

$$5\frac{x^5}{x^3} = 5x^2$$

$$4x^2 \bullet 5x^3 = 20x^5$$

• Grado de un monomio

El grado de un monomio es la suma de los exponentes de sus letras.

Ejemplo:

Grado: $3 + 2 = 5$

$4x^3y^2$

$6abc \longrightarrow$ Grado 3

$3 \longrightarrow$ Grado 0

$\frac{2}{3}x^2yz \longrightarrow$ Grado 4

$4^3x^2b \longrightarrow$ Grado 3

Ejercicio: *Calcula el grado de los monomios.*

a) $-\frac{3}{5}a^2v^5$ *b)* $3x^3yz^3$ *c)* abc *d)* $-\frac{x^4}{x}$

• Polinomio

Un polinomio es una expresión algebraica formada por la suma o resta de varios monomios. A cada monomio de un polinomio se le llama término.

Ejemplo:

Grado: $3 + 2 = 5$

$$-3x^2y + 4x^3y^2 - 3xy$$

Términos

Observación: A los polinomios de dos términos se les llama binomios y a los de tres trinomios. A los de más de tres, simplemente polinomios.

• Grado de un polinomio

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus términos.

Ejemplo: Dime cómo se llaman y su grado

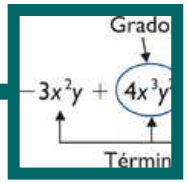
$5x^3 + 6x^2 - 3x - 6$ → Polinomio de grado 3

$-3ab^2c - 5b^3c^2 + 4a^3 - 2$ → Polinomio de grado 5

$7x - 4 + 2x^2 + 5x - 3x^2$ → Trinomio de grado 2

$-1x^2 + 12x - 4$

4.4 Operaciones con monomios



• Monomios semejantes

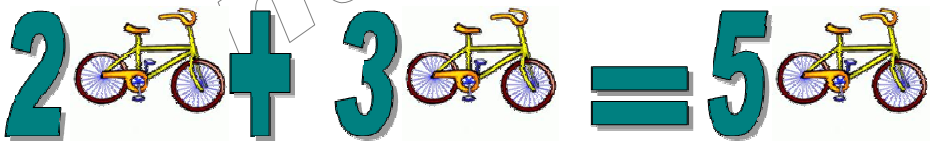
Dos monomios <u>son semejantes</u> si tienen las mismas letras elevadas a los mismos exponentes.

Ejemplo:

$3b^2a$, $-5bab$, $ab^2 \Rightarrow$ Son semejantes

$3ba$, $-5bab$, $a^2b \Rightarrow$ No son semejantes

$$2x^1 + 3x^2 \neq 5x^3$$



$$2x^2 + 3x^2 = 5x^2$$

Ejercicio: *Dime si son semejantes los monomios entre sí.*

a) $4x^2v^4$, xv^4 *b)* $-2abc^3$, $3bc^3a$ *c)* x, x^2, x^3 *d)* az^2, $-5z^2a$

e) as, sa *f)* b^2a, $5ab^2$, $4^{a^2}b^2$ *g)* x^2, $3x^2$, $-2x^2$ *h)* xy^3z^2, xyz^2y^2

• Suma y resta de monomios

Método: Para suma o restar monomios semejantes, se suman o restan los coeficientes dejando la parte literal como estaba.

Observación: Para evitar despistes, se recomienda colocar la parte literal en orden alfabético.

Ejemplo:

$3b^2a-5bab+ab^2 = -1ab^2 = -ab^2$ Monomio de grado 3

$-2x+7x^2-5x+2x^3+\frac{2}{3}x^2-x^3-x = 1x^3+\frac{23}{3}x^2-8x$ Trinomio de grado 3

Ejercicio: *Suma los monomios hasta donde puedas.*

a) $2x+5x^2-10+x-2x^2+4x+7=$

b) $8ab-2b+4ba-3b^2+b^2+ab+6b-b=$

c) $2x^2y^3z+3x^2y^3z-x^2+gh-6x^2zy^3+3hg=$

d) $2x-4x+5x-x^3+5x-2x^3-7=$

e) $-(2x+3x-5x)=$

f) 2☺-3😐+5☹-2☹+😐+2😐-☺=

g) $-(c-2c+5c-0{,}5c)=$ (No tengas miedo a los decimales)

• Multiplicación de monomios

Método: Para multiplicar dos monomios se hace lo siguiente:

- Se aplica la regla de los signos.
- Se multiplican los coeficientes.
- Se copian todas las letras.
- Se suman los exponentes de las letras.

Ejemplo:

$$-3b^2c^2d \bullet 6b^3d^3e^3 = -18b^5c^2d^4e^3 \text{ Monomio de grado 14}$$

$$\frac{-2}{3}x^2y^3 \bullet 4xyz \bullet (-3)y^3z^2 = +\frac{24}{3}x^3y^7z^3 = 8x^3y^7z^3 \text{ Monomio de grado 13}$$

Ejercicio: *Multiplica.*

a) $3x \bullet 5x^2 =$

b) $a \bullet a^2 \bullet a^3 =$

c) $-3x^2y \bullet 5xy^3 =$

d) $7a^2b^3 \bullet 2a \bullet 3b^4z^2 =$

e) $s^2d^4 \bullet 3s^3 \bullet 5s^4d^2 =$

f) $3x^3 \bullet 3x^2 \bullet 5x \bullet y =$

g) $2a^2b^4c \bullet (-3)abc \bullet 5a^4c^2 =$

i) $\frac{2}{3}x \bullet \frac{1}{4}x^2 \bullet \frac{5}{2}x^2 =$

h) $\frac{-3}{7}x^3y^2 \bullet \frac{-1}{5}xy^3z =$

• División de monomios

Método: Para dividir dos monomios se hace lo siguiente:

- Se aplica la regla de los signos.
- Se dividen los coeficientes.
- Se copian todas las letras.
- Se restan los exponentes de las letras.

Ejemplo:

$$-6a^2b^3c^2d^4e^3 : 3b^3d^3 = -2a^2b^0c^2d^1e^3 = -2a^2c^2de^3 \text{ Monomio de grado 8}$$

$$\frac{-2}{3}x^2y^3z : 5x^2y = -\frac{2}{15}x^0y^2z^1 = -\frac{2}{15}y^2z \text{ Monomio de grado 3}$$

Ejercicio: *Divide*

a) $10x^4 : 5x^2 =$

b) $a^5 : a^3 =$

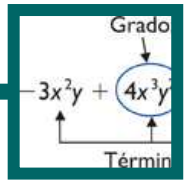
c) $-3x^2y^4 : 5xy^3 =$

d) $7a^2b^3 : 3b^2 =$

e) $8s^4d^4 : 5s^4d^2 =$

f) $7a^2b^3 : 3b^2a^2 =$

4.5 Operaciones con polinomios



• Suma y resta de polinomios

Método: Para sumar o restar polinomios:
- Quitamos llaves, corchetes y paréntesis
- Agrupamos los términos semejantes

Ejemplo:

$$-\left(2x^2-6x\right)+\left(5xy-1+3x^2\right)-\left(y^2-4x+2xy-1\right)=$$

$$-2x^2+6x+5xy-1+3x^2-y^2+4x-2xy+1=$$

$$x^2+10x+3xy-y^2 \Rightarrow \text{ Polinomio de grado 2}$$

Ejemplo:

$$a-\left\{(3b-2a)-\left[2ab-(5ab-3b+2a-2)+3b+(-3ab+1)\right]-2a\right\}=$$

$$a-\left\{3b-2a-\left[2ab-5ab+3b-2a+2+3b-3ab+1\right]-2a\right\}=$$

$$a-\left\{3b-2a-2ab+5ab-3b+2a-2-3b+3ab-1-2a\right\}=$$

$$a-3b+2a+2ab-5ab+3b-2a+2+3b-3ab+1+2a=$$

$$3a+3b-6ab+3 \Rightarrow \text{ Polinomio de grado 2}$$

Ejercicio: *Opera y agrupa*

a) $-\left(2x^2-6x\right)+\left(5xy-1+3x^2\right)-(y^2-4x+2xy-1)=$

b) $a-\left\{(3b-2a)-\left[2ab-\left(5ab-3b+2a-2\right)+3b+\left(-3ab+1\right)\right]-2a\right\}=$

• Multiplicación de polinomios

Método: Para multiplicar polinomios aplicamos la propiedad distributiva.

Ejemplo:

$$-2x^2y \bullet (3x + 2xy^3z - 3y^2 + 4) =$$

$$-6x^3y - 4x^3y^4z + 6x^2y^3 - 8x^2y$$

Polinomio de grado 8

Ejemplo:

$$(-2b + 3b^2) \bullet (3a + b^3 - 2ab - 5) =$$

$$-6ab - 2b^4 + 4ab^2 + 10b + 9ab^2 + 3b^5 - 6ab^3 - 15b^2 =$$

$$-6ab - 2b^4 + 13ab^2 + 10b + 3b^5 - 6ab^3 - 15b^2$$

Polinomio de grado 5

Ejemplo:

$$(-a+2b)(2-3a)(a-2)=$$

$$(-2a+3a^2+4b-6ab)(a-2)=$$

$$-2a^2+4a+3a^3-6a^2+4ab-8b-6a^2b+12ab=$$

$$-8a^2+4a+3a^3+16ab-8b-6a^2b$$

Polinomio de grado 3

Ejercicio: *Opera y agrupa*

a) $-2x^2y \bullet (3x + 2xy^3z - 3y^2 + 4) =$

b) $(-2b + 3b^2) \bullet (3a + b^3 - 2ab - 5) =$

c) $(-a + 2b)(2 - 3a)(a - 2) =$

• División de un polinomio entre un monomio

Método: Para dividir un polinomio entre un monomio aplicamos la propiedad distributiva de la división respecto a la suma.

Ejemplo:

$$(-6x^3+10x^2-4x^2y+\frac{8}{3}x^4-x^2):2x^2$$

$$\frac{-6}{2}x^1+\frac{10}{2}x^0-\frac{4}{2}x^0y^1+\frac{8}{6}x^2-\frac{1}{2}x^0=$$

$$-3x+5-2y+\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{2}=$$

$$-3x+\frac{9}{2}-2y+\frac{4}{3}x^2$$

Polinomio de grado 2

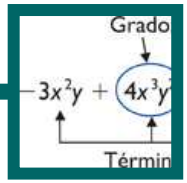
Ejercicio: *Opera y agrupa*

a) $(-6x^3 + 10x^2 - 4x^2y + 8x^4 - x^2) : 2x^2$

b) $(-yx^3z^5 + \frac{-1}{4}x^2z^2xy^2 - 3xy^4z^2 + 6(xyz)^3) : 2xyz^2 =$

c) $(-a^3 + \frac{1}{4}a^5 - a^2 + 2a - \frac{a}{7}) : 2a =$

4.6 Igualdades notables



$$a^m + b^m \neq (a+b)^m$$
$$a^m - b^m \neq (a-b)^m$$

Error frecuente en 2º de ESO

• Potencia de un monomio

Ejemplo:

$$\left(-3a^2b^3cd^4\right)^2 = (-3)^2(a^2)^2(b^3)^2c^2(d^4)^2 = 9a^4b^6c^2d^8$$

• Cuadrado de una suma

Propiedad:

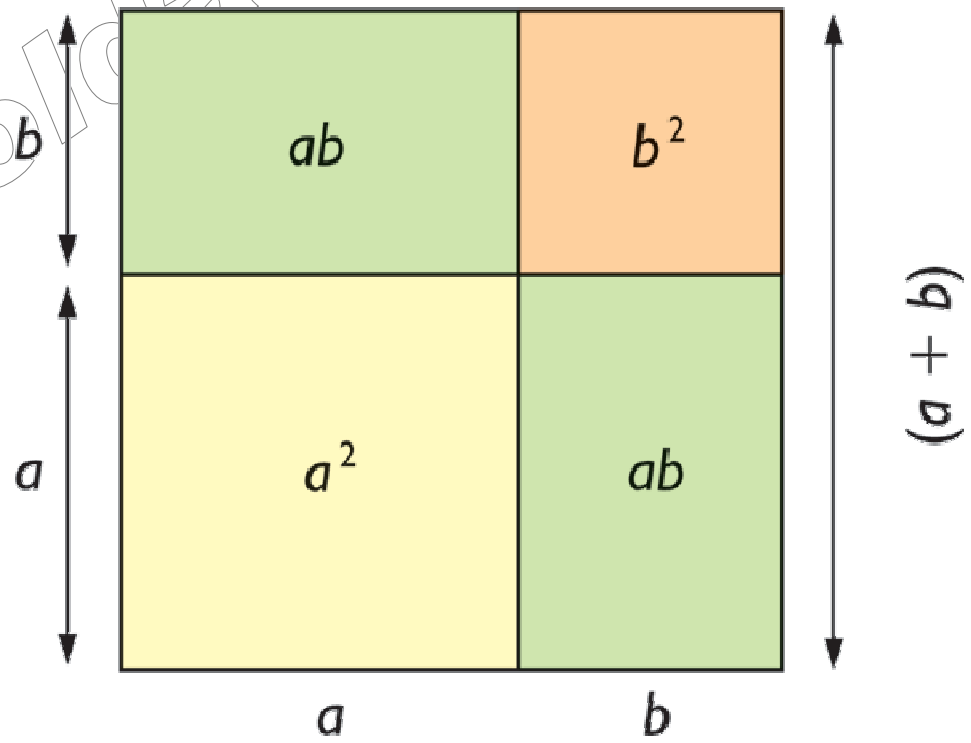
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Vamos a calular el cuadrado de una suma para encontrar la fórmula:

$$(a+b)^2 = (a+b)\bullet(a+b) =$$

$$a^2 + ab + ba + b^2 =$$

$$a^2 + b^2 + 2ab$$



Observación: El signo de la suma que hay entre **a** (1º término) y **b** (2º término), no pertenece a la **b**. Sirve para dos cosas:

•Separar los dos términos

•Indicar que es una suma

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Ejemplo:

$$(-2x^2y^3 + 5x^3y^2)^2 =$$

$$(-2x^2y^3)^2 + (5x^3y^2)^2 + 2 \bullet (-2x^2y^3) \bullet 5x^3y^2 =$$

$$4x^4y^6 + 25x^6y^4 - 20x^5y^5$$

$$\left(5a^3b^2 + \frac{1}{5}b\right)^2 = \left(5a^3b^2\right)^2 + \left(\frac{1}{5}b\right)^2 + 2 \bullet 5a^3b^2 \bullet \frac{1}{5}b =$$

$$25a^6b^4 + \frac{1}{25}b^2 + \frac{10}{5}a^3b^3 = 25a^6b^4 + \frac{1}{25}b^2 + 2a^3b^3$$

Ejercicio: *Opera y agrupa*

a) $(2x^2y^3 + 5x^3y^2)^2 =$

b) $\left(5a^3b^2 + \frac{1}{5}b\right)^2 =$

c) $(-4a^2b + 2a^2b^2)^2$

d) $\left(2x^3y^2z + \frac{1}{4}y^2z^3\right)^2 =$

• Cuadrado de una resta

Propiedad:

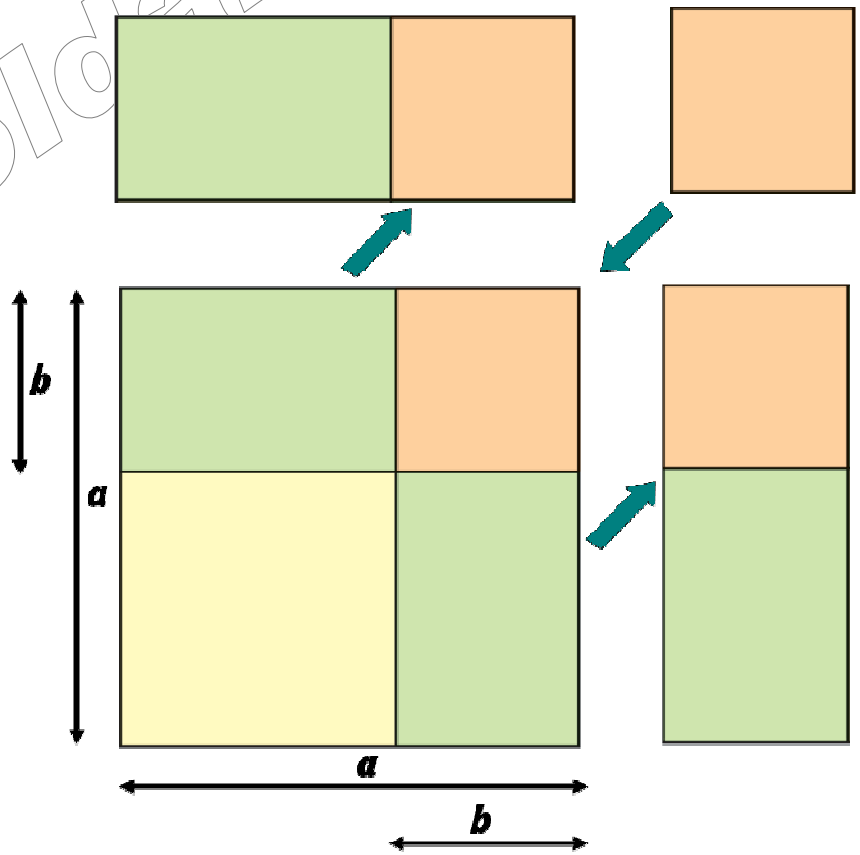
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Vamos a calular el cuadrado de una resta para encontrar la fórmula:

$$(a-b)^2 = (a-b) \bullet (a-b) =$$

$$a^2 - ab - ba + b^2 =$$

$$a^2 + b^2 - 2ab$$



Observación: El signo de la resta que hay entre **a** (1º término) y **b** (2º término), no pertenece a la **b**. Sirve para dos cosas:

•Separar los dos términos

•Indicar que es una resta

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab}$$

Ejemplo:

$$(2x^2y^3 - 3x^3y^2)^2 = (2x^2y^3)^2 + (3x^3y^2)^2 - 2 \bullet 2x^2y^3 \bullet 3x^3y^2 =$$

$$4x^4y^6 + 9x^6y^4 - 12x^5y^5$$

$$\left(-3a^3b^4 - \frac{1}{3}a^2b\right)^2 = \left(-3a^3b^4\right)^2 + \left(\frac{1}{3}a^2b\right)^2 - 2 \bullet (-3)a^3b^4 \bullet \frac{1}{3}a^2b =$$

$$9a^6b^8 + \frac{1}{9}a^4b^2 + \frac{6}{3}a^5b^5 = 9a^6b^8 + \frac{1}{9}a^4b^2 + 2a^5b^5$$

Ejercicio: *Opera y agrupa*

a) $(-2x^2y^3 - 3x^3y^2)^2$

b) $\left(3a^3b^2 - \frac{1}{3}b\right)^2 =$

c) $(-3a^2b - 5a^2b^2)^2$

d) $\left(3x^3y^2z - \frac{1}{6}y^2z^3\right)^2 =$

• Suma por diferencia

Propiedad:

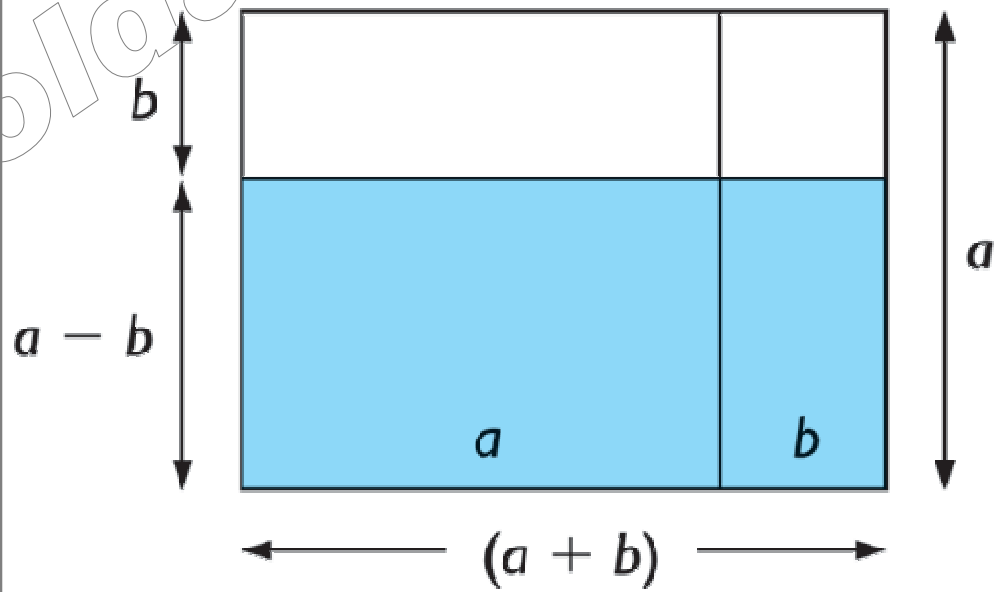
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Vamos a calular una suma por diferencia para encontrar la fórmula:

$$(a+b)(a-b) =$$

$$a^2 - ab + ba - b^2 =$$

$$a^2 - b^2$$



Ejemplo:

$$(-2x^2y^3+3x^3y^2)(-2x^2y^3-3x^3y^2)=$$

$$(-2x^2y^3)^2-(3x^3y^2)^2=$$

$$4x^4y^6-9x^6y^4$$

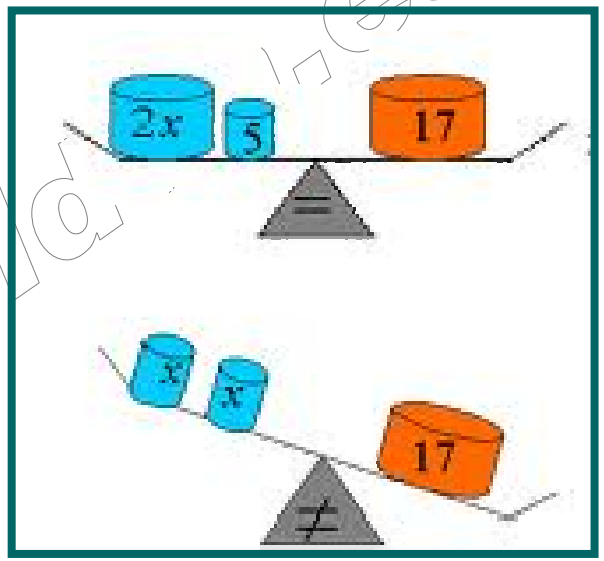
Ejercicio: *Opera y agrupa*

a) $\left(\frac{1}{3}x^3-4b\right)\bullet\left(\frac{1}{3}x^3+4b\right)=$

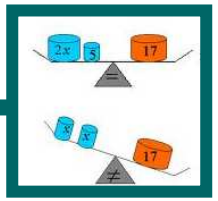
b) $\left(-2a^3b-3x\right)\bullet\left(-2a^3b+3x\right)=$

5

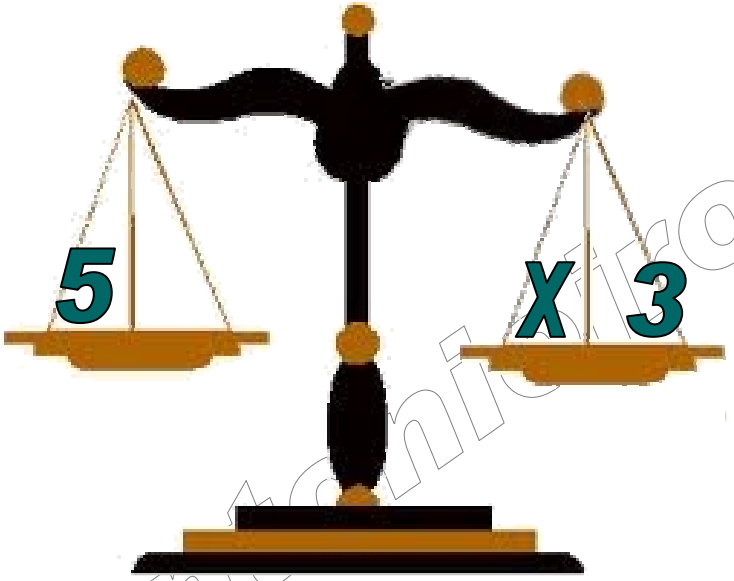
Ecuaciones



5.1 Igualdades y ecuaciones



• Igualdades numéricas



Una igualdad numérica se compone de dos expresiones numéricas del mismo valor unidas por el signo igual.

Ejemplo: ¿Son igualdades numéricas?

$$2+2\bullet 3=12$$

$$2+2\bullet 3=2^3$$

• Ecuaciones

Una <u>ecuación</u> es una igualdad con números y letras que expresa una condición que deben cumplir las letras. Estas letras se llaman <u>incógnitas</u>.

Ejemplo:

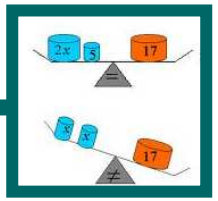
Ecuación de	1º grado	1 incógnita	$\frac{x}{6}-3=\frac{-x}{3}$
Ecuación de	2º grado	1 incógnita	$x^2-x-6=0$
Sistema de ecuaciones	1º grado	2 incógnitas	$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+4y=34 \end{cases}$
Sistema de ecuaciones	1º grado	3 incógnitas	$\begin{cases} x+y+z=9 \\ 2x-4y=-6 \\ z-y=0 \end{cases}$
Sistema de ecuaciones	2º grado	2 incógnitas	$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 2xy=2 \end{cases}$

Las soluciones de una ecuación son los valores que deben tomar las incógnitas para que se verifique la igualdad.

Resolver una ecuación es hallar sus soluciones.

Despejar una incógnita es dejarla sola igualada a su valor.

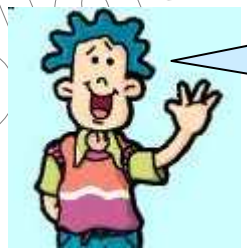
5.2 Resolución de una ecuación



• Ecuaciones equivalentes

Ejemplo: Veamos que x=1 es solución de ambas ecuaciones.

$$\frac{2(x-2)^2}{4} = \frac{x}{2} \qquad 2x = 2$$



Pues yo prefiero la 2ª, je, je..

Dos o más ecuaciones son <u>equivalentes</u> si tienen las mismas soluciones.

• Reglas de la suma y el producto

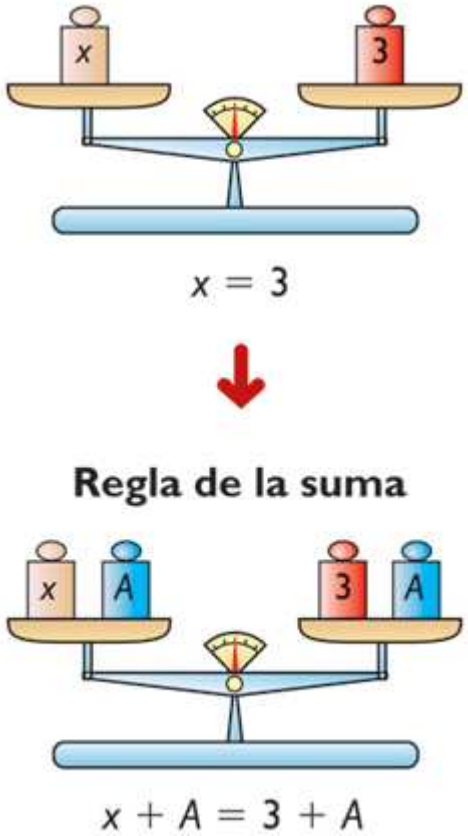
Método (<u>Regla de la suma):</u> Si a los dos miembros de una ecuación les sumamos o restamos un mismo número, o expresión algebraica, obtenemos otra ecuación equivalente.

Ejemplo:

$$6x - 13 = 5x + 23$$

$$6x - 5x = 23 + 13$$

$$x = 36$$



Método (<u>Regla del producto):</u> Si a los dos miembros de una ecuación los multiplicamos o dividimos por un mismo número, o expresión algebraica, distintos de cero, obtenemos otra ecuación equivalente.

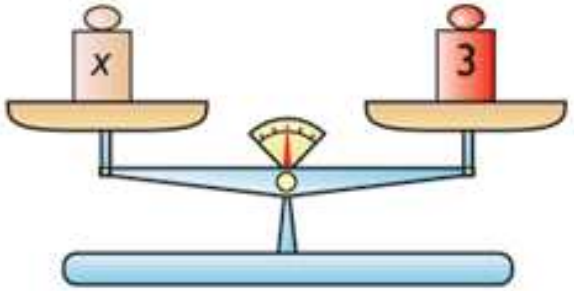
Ejemplo:

$$\frac{3x}{7} = 42$$

$$3x = 42 \bullet 7$$

$$3x = 294$$

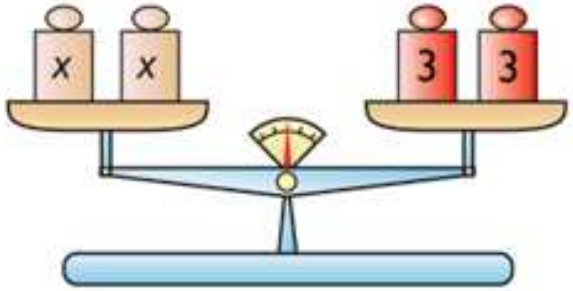
$$x = \frac{294}{3} = 98$$



$x = 3$

$\downarrow \bullet 2$

Regla del producto



$2 \cdot x = 2 \cdot 3$

• Pasos para resolver una ecuación

Método:

1. Una vez que no queden productos pendientes, quitamos denominadores
2. Quitamos paréntesis
3. Separamos números y letras
4. Agrupamos
5. Despejamos

Observación: Este método puede ser más lento, pero quizás más seguro porque evita algunos fallos de signos.

Ejemplo:

$$-3(x+2)=\frac{x}{4}+1 \Rightarrow -3x-6=\frac{x}{4}+1 \Rightarrow$$

$$\frac{4\bullet(-3x-6)}{4}=\frac{x}{4}+\frac{4}{4} \Rightarrow \frac{-12x-24}{4}=\frac{x}{4}+\frac{4}{4} \Rightarrow$$

$$-12x-24=x+4 \Rightarrow -13x=4+24 \Rightarrow$$

$$-13x=28 \Rightarrow x=\frac{28}{-13}=\frac{-28}{13}=-\frac{28}{13}$$

Ejemplo:

$$\frac{x+3}{8}-\frac{3\bullet(x-5)}{4}-\frac{2x-3}{10}=1\Rightarrow\frac{x+3}{8}-\frac{3x-15}{4}-\frac{2x-3}{10}=\frac{1}{1}\Rightarrow$$

$$\frac{5x+15}{40}-\frac{30x-150}{40}-\frac{8x-12}{40}-\frac{40}{40}\Rightarrow$$

$$5x+15-30x+150-8x+12=40\Rightarrow 5x-30x-8x=40-15-150-12\Rightarrow$$

$$-33x=-137\Rightarrow x=\frac{-137}{-33}=\frac{137}{33}$$

Ejercicio: *Resuelve*

a) $2x = 8$

b) $-3x = 6$

c) $3x - 2 = 7$

d) $-5x - 3 = 12$

e) $6x - 2 = 4x + 1$

f) $3 - x = 5x + 9$

g) $\frac{4}{x} = 2$

h) $\sqrt{x} = 3$

g) $\frac{x}{2} = 3$

Ejercicio: *Resuelve*

a) $3x-(3-5x)=7$

b) $-(2-3x)+2(x-1)=5$

c) $6+3(x-4)-2x=4x-4$

d) $-x-(4x-2)+5=3x-10$

e) $6x-(2x-5)+x=10-2(x-3)$

f) $1+(x-2)-(x-4)=4(5-x)$

Ejercicio: *Resuelve*

a) $-2x+(3x-4)-(x-3)+x-4=3$ *b)* $\frac{2x-4}{2}-\frac{3x-6}{12}=4-\frac{x}{6}$ *c)* $3-\frac{x-1}{2}+\frac{x+1}{4}=x$

d) $x-\frac{x-3}{2}+\frac{8-x}{3}-\frac{x}{5}=-1+x$ *e)* $\frac{x+5}{2}-2-\frac{2-2x}{4}=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+x$ *f)* $\frac{x+3}{8}-3\bullet\frac{x-5}{4}-\frac{2x-3}{10}=1$